

分数阶混沌系统的 控制与同步设计

张友安 袁 建 刘京茂 孙玉梅 ©著

電子工業出版社·

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

内 容 简 介

本书系统总结了作者及其合作者近年来在分数阶混沌系统的控制与同步设计中的分数阶控制理论、方法与最新研究成果。主要包括：分别基于无穷状态方法和 Mittag-Leffler 稳定性方法针对一类新型分数阶混沌系统，设计滑模控制律及自适应律；针对分数阶统一混沌系统，分别设计滑模控制律、自适应律、主动控制律；基于反步控制技术，针对分数阶严反馈系统设计反馈控制律；针对单输入单输出非线性系统设计分数阶滑模控制律。

本书除了介绍的内容比较新颖和前沿外，绝大部分的控制与同步方法均提供了详细的仿真程序，有利于初学者学习、模仿与验证。本书的相关研究成果对于从事分数阶微积分、分数阶控制、混沌系统的控制与同步领域的大学老师及研究生具有一定的参考价值。

未经许可，不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。
版权所有，侵权必究。

图书在版编目（CIP）数据

分数阶混沌系统的控制与同步设计 / 张友安等著. —北京：电子工业出版社，2018.1

ISBN 978-7-121-33153-4

I. ①分… II. ①张… III. ①混沌—研究 IV. ①O415.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 298367 号

策划编辑：朱雨萌

责任编辑：杨秋奎

特约编辑：刘广钦

印 刷：

装 订：

出版发行：电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱

邮编：100036

开 本：720×1000 1/16 印张：12.25 字数：213 千字

版 次：2018 年 1 月第 1 版

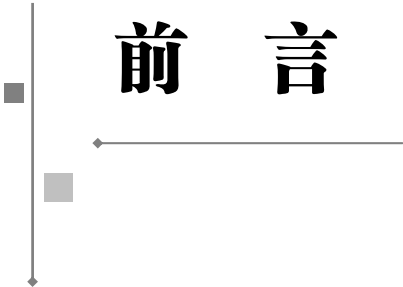
印 次：2018 年 1 月第 1 次印刷

定 价：49.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888，88258888。

质量投诉请发邮件至 zltz@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件到 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式：（010）88254750。



前言

分数阶微积分将经典微积分的阶次由整数拓展到了任意实数甚至复数的情形，因此可以把它看成整数阶微积分的推广，是整体微积分的一部分。从定义上看，分数阶微积分实际上是带有 Abel 核函数（或幂律核函数）的第二类 Volterra 型微分积分方程。因此，它非常适合用来描述具有记忆和遗传性质的材料和物理过程。与整数阶微积分相比，分数阶微积分建模具有简单、精确和参数的物理意义清楚等优势。自 20 世纪 70 年代开始，分数阶微积分在机械工程、生物化学、电子工程及医学等多个学科中得到了广泛、有趣而又新奇的应用，成为备受关注的强大数学建模工具与数学分析工具。2009 年 10 月，汤森路透集团独家授权的《科学观察》杂志将分数阶微积分评选为新兴研究前沿。2010 年的美国数学分类号（MSC2010）中也增加了分数阶微积分的条目。

混沌现象作为非线性动力学系统所特有的运动形式，广泛存在于物理、化学、生物学、经济学等学科中。随着电子电路中分数阶电容与分数阶电感的出现，分数阶混沌系统成为一类典型的分数阶动力系统。分数阶混沌系统的控制与同步问题的研究引起了广大学者的兴趣。它不仅在保密通信中具有潜在的应用价值，而且可为控制律的设计和实现提供思路 and 动力。分数阶控制是分数阶微积分与现代控制理论相结合而产生的一种新的控制理论和方法，较早提出的分数阶控制方法有 TID 控制、CRONE 控制、分数阶 PID 控制等，目前的研究主要集中在分数阶滑模控制、分数阶自适应控制、分数阶最优控制等分数阶非线性控制方法上。

本书系统地总结了作者及其合作者近年来在分数阶混沌系统的控制与同步设计问题研究中的成果。其中,第1章介绍了分数阶微积分的基本理论,包括分数阶微积分的定义及性质、分数阶微积分的几个重要定理、分数阶控制的研究现状、分数阶混沌系统的控制与同步的研究现状;第2、3章分别基于无穷状态方法和Mittag-Leffler稳定性方法针对一类新型分数阶混沌系统设计滑模控制律及自适应律;第4~6章针对分数阶统一混沌系统分别设计滑模控制律、自适应律、主动控制律;第7章基于反步控制技术,针对分数阶严反馈系统设计反馈控制律;第8章针对单输入单输出非线性系统,设计分数阶滑模控制律。


全书共8章。第4、6~8章由张友安与袁建共同编写,第3、5章由张友安、袁建与刘京茂(山东南山国际飞行有限公司高工)共同编写,第1、2章由张友安、袁建与孙玉梅(烟台南山学院教授)共同编写。全书由烟台南山学院教授张友安统稿。

本书的部分内容参考和引用了国内外同行专家、学者的最新研究成果,在此特向他们表示由衷的感谢。本书的出版得到了烟台南山学院、海军航空工程学院与电子工业出版社各级领导和朱雨萌编辑的大力支持,在此一并表示感谢!


另外,本书的作者之一袁建感谢其博士生导师时宝教授在袁建本人攻读博士研究生期间的精心指导和教诲。感谢修国众博士对书稿所做的校稿工作。

本书的研究工作,得到了山东省自然科学基金(ZR2014AM006)的支持。

由于作者在分数阶微积分领域涉足时间不长,学识水平有限,疏漏和不足之处在所难免,恳请读者批评指正。



目 录



第 1 章 分数阶微积分的基本理论	1
1.1 分数阶微积分的定义及性质	2
1.1.1 Grunwald-Letnikov 微积分定义及性质	2
1.1.2 Riemman-Liouville 分数阶积分的定义及性质	6
1.1.3 Caputo 导数定义及性质	8
1.1.4 三种分数阶导数之间的关系	8
1.1.5 电子电路中的分数阶导数	9
1.2 分数阶微积分的几个重要引理	10
1.3 分数阶控制	12
1.4 分数阶混沌的控制与同步	13
第 2 章 一类分数阶混沌系统滑模控制设计：无穷状态方法	15
2.1 问题描述	16
2.2 无穷状态方法	17
2.3 分数阶滑模控制设计	19
2.3.1 分数阶滑模面设计	19
2.3.2 分数阶滑模控制律设计	21

2.3.3 分数阶滑模自适应控制律设计	22
2.4 应用实例及数值仿真	24
2.4.1 分数阶 Lorenz 系统滑模控制律设计与数值仿真	24
2.4.2 分数阶 Chen 系统的滑模控制律设计与仿真	34
2.4.3 分数阶 Lorenz-Stenflo 系统的滑模控制律设计与仿真	43
2.5 本章小结	48
第 3 章 一类分数阶混沌系统滑模控制设计: Mittag-Leffler 稳定性方法	49
3.1 分数阶滑模控制设计	50
3.1.1 分数阶滑模面设计	50
3.1.2 分数阶滑模控制律设计	51
3.1.3 分数阶滑模自适应控制律设计	52
3.2 数值仿真	54
3.2.1 分数阶 Lorenz 系统滑模控制律设计与数值仿真	54
3.2.2 分数阶 Lorenz 系统的滑模自适应控制律设计与仿真	59
3.2.3 分数阶 Lorenz-Stenflo 系统的滑模控制律设计与仿真	66
3.3 无穷维状态方法与 Mittag-Leffler 稳定性方法的比较	76
3.4 本章小结	77
第 4 章 分数阶统一混沌系统的同步设计: 滑模方法 (I)	78
4.1 问题描述	78
4.2 标称混沌系统之间的同步设计	80
4.3 不确定混沌系统之间的同步	82
4.4 数值仿真	86
4.5 本章小结	109
第 5 章 分数阶统一混沌系统控制与同步: 滑模方法 (II)	110
5.1 分数阶统一混沌系统的镇定	110

5.2 分数阶统一混沌系统的同步	112
5.3 数值仿真	113
5.4 本章小结	126
第 6 章 分数阶统一混沌系统控制与同步设计：主动控制方法	127
6.1 分数阶统一混沌系统的控制	127
6.2 分数阶统一混沌系统的同步	130
6.3 数值模拟	132
6.4 本章小结	144
第 7 章 分数阶严反馈系统的反步控制及同步设计	145
7.1 问题描述	145
7.2 基于反步法的分数阶 Genesio-Tesi 系统的控制设计	146
7.3 基于反步法的分数阶 Genesio-Tesi 系统的同步设计	149
7.4 数值模拟	151
7.5 本章小结	165
第 8 章 分数阶伴随型系统的滑模控制设计	166
8.1 问题描述	166
8.2 控制律设计	167
8.3 分数阶 G-T 系统与 Arneodo 系统的同步设计	170
8.4 数值模拟	171
8.5 本章小结	176
参考文献	177

第 1 章

分数阶微积分的基本理论

在数学、科学及工程上，经常会用到微分和积分算子，如 $\frac{d}{dt}$, $\frac{d^2}{dt^2}$, $\int_a^t f(\tau)d\tau, \dots$ ，这些算子的阶次是限制在整数域上的。如果阶次是分数、有理数、无理数，甚至是复数时会如何呢？在 17 世纪末，也就是 Newton 和 Leibniz 建立微积分理论的同一时期，Leibniz 就提出了这个问题。他给 L'Hospital 的信中写道：“整数阶的导数是否可以推广到非整数的情形？” L'Hospital 对这个问题很感兴趣，他用另外一个问题回复：“如果阶次是 1/2 会如何呢？” Leibniz 在 1695 年 9 月 30 日回信说：“这样会产生一个悖论，然而这个悖论将来会产生有用的结果。”由此，非整数阶微积分成为 300 多年来一直在研究的一个方向。发展到今天，人们称这门学科为“分数阶微积分 (Fractional Calculus)”，即将一般的整数阶微积分推广到任意阶次（非整数阶）的情形^[1]。因此，分数阶微积分 (Fractional Calculus) 是研究任意阶次微分或积分算子特性及其应用的数学分支，是整数阶微积分的自然推广。

300 多年来，分数阶微积分的发展主要集中在数学纯理论方面的研究。直到最近的 20 多年，分数阶微积分在很多学科中得到了大量有趣而又新奇的应用^[2]。分数阶的数学模型已经成功地应用于各种领域，如机械工程（粘弹性和粘塑性理

论)、化学(高分子聚合物和蛋白质的建模)、电子工程(超声波的传播)、医学领域(机械负荷下人体组织的建模),等等^[3]。分数阶微积分非常适合于刻画具有记忆和遗传性质的材料和过程^[4],其对复杂系统的描述具有建模简单、参数物理意义清楚、描述准确等优势^[5],因而成为复杂力学与物理过程数学建模的重要工具之一。2009年10月,汤森路透(Thomson Reuters)集团独家授权的《科学观察》杂志将分数阶微积分确定为新兴的研究前沿^[6]。在2010版的美国数学分类号(MSC2010)中也增加了分数阶微积分的条目。

1.1 分数阶微积分的定义及性质

1.1.1 Grunwald-Letnikov 微积分定义及性质

在经典的整数阶微积分中, n 阶导数与 n 重积分是分开介绍的。而在Grunwald-Letnikov微积分的定义方法中,可以将它们在形式上进行统一,通过统一的表达式很自然地推广到非整数的或任意阶次的微积分。

首先,考虑一个连续函数 $f(t)$ 。根据导数的定义, $f(t)$ 的一阶导数为

$$f'(t) = \frac{df(t)}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \quad (1-1)$$

$f(t)$ 的二阶导数为

$$\begin{aligned} f''(t) &= \frac{d^2 f(t)}{dt^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(t) - f'(t-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2} \end{aligned} \quad (1-2)$$

$f(t)$ 的三阶导数为

$$\begin{aligned} f'''(t) &= \frac{d^3 f(t)}{dt^3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(t) - f''(t-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 3f(t-h) + 3f(t-2h) - f(t-3h)}{h^3} \end{aligned} \quad (1-3)$$

根据数学归纳法,得到 $f(t)$ 的 n 阶导数为

$$\begin{aligned}
 f^{(n)}(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) + (-1)^1 \binom{n}{1} f(t-h) + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} f(t-nh)}{h^n} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} f(t-rh)
 \end{aligned} \quad (1-4)$$

其中, $\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}$ 。

将式(1-1)至式(1-4)的表达式推广为

$$f_h^{(p)}(t) = \frac{1}{h^p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} f(t-rh) \quad (1-5)$$

式(1-5)中 p 为任意整数, n 为整数。

当 $p = n$ 时,

$$\lim_{h \rightarrow 0} f_h^{(p)}(t) = f^{(p)}(t) = \frac{d^p f(t)}{dt} \quad (1-6)$$

式(1-6)指出了 p 取正整数情形下即整数阶 (p 阶) 导数的统一表达式, 下面考虑 p 取负整数情形下即 p 重积分的统一表达式。为方便起见, 引入以下记号:

$$\left[\begin{matrix} p \\ r \end{matrix} \right] = \frac{p(p+1)\cdots(p+r-1)}{r!}, \quad p > 0 \quad (1-7)$$

显然, 两个记号 $\left[\begin{matrix} p \\ r \end{matrix} \right]$ 与 $\binom{p}{r}$ 之间有如下关系:

$$\binom{-p}{r} = \frac{-p(-p-1)\cdots(-p-r+1)}{r!} = (-1)^r \left[\begin{matrix} p \\ r \end{matrix} \right] \quad (1-8)$$

在式(1-5)中, 将 p 替换为 $-p$, 则根据关系式(1-8)得

$$\begin{aligned}
 f_h^{(-p)}(t) &= \frac{1}{h^{-p}} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{-p}{r} f(t-rh) \\
 &= \frac{1}{h^{-p}} \sum_{r=0}^n \left[\begin{matrix} p \\ r \end{matrix} \right] f(t-rh), \quad p > 0
 \end{aligned}$$

正如导数情形式 (1-5) 至式 (1-6) 的做法, 下面研究 $f_h^{(-p)}(t)$ 当 $h \rightarrow 0$ 时的极限。

当 n 固定时, $\lim_{h \rightarrow 0} f_h^{(-p)}(t) = 0$ 。为了得到非零的极限值, 假设 $h \rightarrow 0$ 时 $n \rightarrow \infty$ 。取 $h = \frac{t-a}{n}$, $f_h^{(-p)}(t)$ 的极限值可能是限值, 也有可能是无穷, 引入记号

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} f_h^{(-p)}(t) = {}_a D_t^{-p} f(t) \quad (1-9)$$

式 (1-9) 实际上定义了一种运算或算子, 该算子作用于 $f(t)$, a 和 t 分别为下端点和上端点。

下面研究几种特殊的情形。

(1) 当 $p=1$ 时,

$$f_h^{(-1)}(t) = h \sum_{r=0}^n f(t-rh)$$

取极限 $h \rightarrow 0$, 得

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} f_h^{(-1)}(t) = {}_a D_t^{-1} f(t) = \int_0^{t-a} f(t-z) dz = \int_a^t f(\tau) d\tau \quad (1-10)$$

(2) 当 $p=2$ 时,

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} f_h^{(-2)}(t) = {}_a D_t^{-2} f(t) = \int_a^t (t-\tau) f(\tau) (t-\tau) d\tau \quad (1-11)$$

(3) 当 $p=3$ 时,

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} f_h^{(-3)}(t) = {}_a D_t^{-3} f(t) = \frac{1}{2!} \int_a^t (t-\tau)^2 f(\tau) d\tau \quad (1-12)$$

将表达式 (1-10) 至式 (1-12) 作一推广, 且由数学归纳法可以证明:

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{-p} f(t) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t-rh) \\ &= \frac{1}{(p-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (1-13)$$

不难看出, 式 (1-14) 实际上是 p 重积分。

综合式 (1-6) 与式 (1-13) 可以得到, 连续函数 $f(t)$ 的整数阶 (p 阶) 导数与 p 重积分有相同的表达式:

$${}_a D_t^p f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} \frac{1}{h^p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{j} f(t-rh) \quad (1-14)$$

由 p 阶导数与 p 重积分的统一表达式 (1-14) 自然联想到, 将 p 推广到实数甚至复数的情形时, 经典的整数阶微积分就演变为任意阶次的微分或积分, 称为分数阶微积分。

Grunwald-Letnikov 分数阶微积分具有如下性质。

性质 1 分数阶导数运算是连续的, 即

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} {}^GL_a D_t^\alpha f(t) = {}^GL_a D_t^{\alpha_0} f(t), \quad \forall \alpha, \alpha_0 > 0$$

性质 2 分数阶微积分算子是线性算子, 即对于任意的常数 λ_1, λ_2 , 有

$${}^GL_a D_t^\alpha (\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t)) = \lambda_1 {}^GL_a D_t^\alpha f_1(t) + \lambda_2 {}^GL_a D_t^\alpha f_2(t)$$

性质 3 整数阶导数算子与分数阶导数算子有如下关系式:

$$\frac{d^n}{dt^n} ({}^GL_a D_t^\alpha f(t)) = {}^GL_a D_t^\alpha \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-\alpha-n+k}}{\Gamma(-\alpha-n+k+1)}$$

特别地, 若被积函数 $f(t)$ 的各阶导数在下端点取值为零, 即 $f^{(k)}(a) = 0$, 当 $k = 0, 1, \dots, n-1$ 时, 整数阶导数算子与分数阶导数算子满足交换律, 即

$$\frac{d^n}{dt^n} ({}^GL_a D_t^\alpha f(t)) = {}^GL_a D_t^\alpha \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) = {}^GL_a D_t^{\alpha+n} f(t)$$

性质 4 分数阶微积分算子之间的运算关系如下:

(1) 当 $\alpha < 0$ 时, 对于任意的 $\beta \in R$, 有

$${}^GL_a D_t^\alpha [{}^GL_a D_t^\beta f(t)] = {}^GL_a D_t^{\alpha+\beta} f(t)$$

(2) 当 $0 < m < \alpha < m+1$ 时, 若被积函数 $f(t)$ 的各阶导数在下端点取值为零, $f^{(k)}(a)=0, k=0,1,\dots,n-1$ 时, 那么对于任意的 $\beta \in R$, 上式也成立。

(3) 当 $0 < m < \alpha < m+1, 0 < n < \beta < n+1$ 时, 若 $f^{(k)}(a)=0, k=0,1,\dots,r-1$, 其中 $r = \max\{m,n\}$, 则有

$${}^G_a D_t^\beta \left[{}^G_a D_t^\alpha f(t) \right] = {}^G_a D_t^\alpha \left[{}^G_a D_t^\beta f(t) \right] = {}^G_a D_t^{\alpha+\beta} f(t)$$

1.1.2 Riemann-Liouville 分数阶积分的定义及性质

n 重积分的表达式为

$$\int_a^t \int_a^{\tau_n} \int_a^{\tau_{n-1}} \cdots \int_a^{\tau_3} \int_a^{\tau_2} f(\tau_1) d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_{n-1} d\tau_n = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \quad (1-15)$$

式中, $n \in N, n > 0$ 。

将式 (1-15) 中的自然数 n 推广到实数并用 α 代替, 则 α 阶积分定义为

$${}_a I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (1-16)$$

式中, $\Gamma(n)$ 为 Gamma 函数, 定义为

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt$$

式 (1-6) 称为 Riemann-Liouville 分数阶积分。

由式 (1-14) 可以看出, Grunwald-Letnikov 导数实际上是分数阶次倒 (反向) 差分的极限, 这种离散形式的定义在应用中不是很方便。Riemann-Liouville 导数的定义避免了这一问题。

$${}^{RL}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} \quad (1-17)$$

式中, $n-1 < \alpha < 1$ 。

Riemann-Liouville 型分数阶微积分定义中, 当微分或积分的阶次取整数时, 即退化成整数阶微积分, 因此, Riemann-Liouville 型分数阶微积分与整数阶的微积分是统一的。Riemann-Liouville 型分数阶微积分具有如下性质:

性质 1 如果被积函数 $f(t)$ 是连续可导的, 则有

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} {}_a I_t^\alpha f(t) = f(t)$$

性质 2 Riemann-Liouville 型分数阶积分是线性算子, 即对于任意的常数 λ_1, λ_2 , 有

$${}_a I_t^\alpha (\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t)) = \lambda_1 {}_a I_t^\alpha f_1(t) + \lambda_2 {}_a I_t^\alpha f_2(t)$$

性质 3 Riemann-Liouville 型分数阶积分运算之间可以交换, 即对于任意的 α, β , 有

$${}_a I_t^\alpha {}_a I_t^\beta f(t) = {}_a I_t^\beta {}_a I_t^\alpha f(t) = {}_a I_t^{\alpha+\beta} f(t)$$

性质 4 Riemann-Liouville 型分数阶积分与整数阶导数之间不可交换, 有如下关系式:

$$\begin{aligned} {}_a I_t^{\alpha+n} \left[\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right] &= {}_a I_t^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{\alpha+k}}{\Gamma(\alpha+k+1)} \\ \frac{d^n}{dt^n} [{}_a I_t^\alpha f(t)] &= {}_a I_t^\alpha \left[\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right] + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{\alpha-n+k}}{\Gamma(\alpha-n+k+1)} \end{aligned}$$

式中, n 为正整数, $\alpha > 0$ 为实数。

性质 5 设 $\alpha > 0$, $n-1 < \alpha < n$, $f(t) \in C^n[a, T]$, 则有

$$\begin{aligned} {}^{RL}_a D_t^\alpha [{}_a I_t^\alpha f(t)] &= f(t) \\ {}_a I_t^\alpha [{}^{RL}_a D_t^\alpha f(t)] &= f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)} [{}^{RL}_a D_t^{\alpha-k} f(t)]_{t=a} \end{aligned}$$

性质 6 设 $\alpha > 0$, $\beta > 0$, ${}^{RL}_a D_t^{\beta-\alpha} f(t)$ 存在, 则

$${}^{RL}_a D_t^\beta [{}_a I_t^\alpha f(t)] = {}^{RL}_a D_t^{\beta-\alpha} f(t)$$

性质 7 设 $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $f(t) \in C^n[a, T]$, $n = [\alpha] + 1$, 则

$${}^{RL}_a D_t^\beta [{}_a I_t^\alpha f(t)] = {}^{RL}_a D_t^{\beta-\alpha} f(t)$$

$${}_a I_t^\beta \left[{}^{RL}_a D_t^\alpha f(t) \right] = {}^{RL}_a D_t^{\alpha-\beta} f(t) - \sum_{k=0}^n \frac{(t-a)^{\beta-k}}{\Gamma(\beta-k+1)} \left[{}^{RL}_a D_t^{\alpha-k} f(t) \right]_{t=a}$$

性质 8 设 $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $n-1 < \alpha < n$, $m-1 < \beta < m$, $m, n \in \mathbb{Z}^+$, $r = \max\{m, n\}$, $f(t) \in C^r[a, T]$, 则有

$$\begin{aligned} {}^{RL}_a D_t^\beta \left[{}^{RL}_a D_t^\alpha f(t) \right] &= {}^{RL}_a D_t^{\alpha+\beta} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{k-n-\beta}}{\Gamma(k-n-\beta+1)} \left[{}^{RL}_a D_t^{\alpha-n+k} f(t) \right]_{t=a} \\ {}^{RL}_a D_t^\alpha \left[{}^{RL}_a D_t^\beta f(t) \right] &= {}^{RL}_a D_t^{\alpha+\beta} f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-a)^{k-m-\alpha}}{\Gamma(k-m-\alpha+1)} \left[{}^{RL}_a D_t^{\beta-m+k} f(t) \right]_{t=a} \end{aligned}$$

1.1.3 Caputo 导数定义及性质

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} \quad (1-18)$$

式中, $n-1 < \alpha < n$ 。

性质 1 设 $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$, $f(t) \in C^1[a, T]$, 则有

$${}_a^C D_t^\alpha {}_a^C D_t^\beta f(t) = {}_a^C D_t^\beta {}_a^C D_t^\alpha f(t) = {}_a^C D_t^{\alpha+\beta} f(t)$$

性质 2 设 $f(t) \in C^m[a, T]$, $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i$, $\alpha_i \in (0, 1]$, $m-1 < \alpha < m$, $m \in \mathbb{Z}^+$,

$\alpha + \beta = 1$, 且存在 $i_k < n$, 使得 $\sum_{j=1}^{i_k} \alpha_j = k$, $k = 1, 2, \dots, m-1$, 则有

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = {}_a^C D_t^{\alpha_n} {}_a^C D_t^{\alpha_{n-1}} \dots {}_a^C D_t^{\alpha_1} f(t)$$

1.1.4 三种分数阶导数之间的关系

Grunwald-Letnikov 型分数阶微积分与 Caputo 型分数阶微积分之间有如下关系:

设被积函数 $f(t) \in C^{m+1}[a, T]$, 且 m 至少取到 $[\alpha] = n-1$, 其中 α 为分数阶微积分的阶次, 记 $m = n-1$, 若函数 $f(t)$ 满足 $f^{(k)}(a) = 0$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, 则 Grunwald-Letnikov 型分数阶微积分的定义与 Caputo 型分数阶微积分定义是等价的。

Riemann-Liouville 型分数阶微积分与 Caputo 型分数阶微积分之间有如下关系:

设被积函数 $f(t) \in C^{m+1}[a, T]$, 且 m 至少取到 $[\alpha] = n-1$, 设 $m = n-1$, 函数 $f(t)$ 满足 $f^{(k)}(a) = 0, k = 0, 1, \dots, n-1$, 则有

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = {}_a^{RL} D_t^\alpha f(t)$$

1.1.5 电子电路中的分数阶导数

Westerlund、Jonscher 等学者在研究电容器时, 发现电压电流在频域中的关系为^[7]

$$I(s) = C_\phi s^\alpha U(s), \quad 1 < \alpha < 1 \quad (1-19)$$

在时域中, 式 (1-19) 对应于

$$i(t) = C_\phi \frac{d^\alpha u(t)}{dt^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (1-20)$$

其中, $\frac{d^\alpha u(t)}{dt^\alpha}$ 称为电压的分数阶导数。下面应用卷积的性质给出 $\frac{d^\alpha u(t)}{dt^\alpha}$ 的计算过程:

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha u(t)}{dt^\alpha} &= L^{-1}(s^\alpha U(s)) = \frac{d}{dt} L^{-1}\left[\frac{U(s)}{s^{1-\alpha}}\right] \\ &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)t^\alpha} * u(t) \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{u(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \end{aligned} \quad (1-21)$$

其中, L^{-1} 表示 Laplace 逆变换, $*$ 表示卷积运算。

式 (1-21) 的推导过程中得到了与式 (1-17) 相同的 Riemann-Liouville 分数阶导数的定义 ($0 < \alpha < 1$)。

Westerlund 更进一步地研究了电感中的电压电流关系式, 得到了下列方程^[7]:

$$V(t) = L \frac{d^\alpha I(t)}{dt^\alpha} \equiv LD^\alpha I(t) \quad (1-22)$$

一般地, 将满足关系式 (1-20) 的电容器称为分数阶电容器, 满足式 (1-22) 的电感称为分数阶电感。

分数阶微积分还被用来研究超级电容器的建模问题, 这是由于超级电容器的内部是复杂的多孔结构, 其动态特性表现出分数阶特征。随着超级电容器的快速发展, 分数阶建模的研究具有一定的理论意义和实际工程价值^[8]。

1.2 分数阶微积分的几个重要引理

引理 1.1 对于如下分数阶同元阶次线性时不变系统

$$\begin{cases} D^q x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

其中, $x \in R^n$ 为系统的状态, $u \in R^r$ 为系统的输入, $y \in R^p$ 为系统的输出。 $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times r}$, $C \in R^{p \times n}$, $q = (q_1, q_1, \dots, q_n)$ 为分数阶导数的阶次。

当 $|\arg(\text{eig}(A))| > \frac{\alpha\pi}{2}$ 时, 分数阶同元阶次系统是稳定的。其中, $0 < \alpha < 2$, $\text{eig}(A)$ 表示矩阵 A 的特征值。

引理 1.2^[9] 考虑如下 n 维分数阶异元阶次线性时不变系统:

$$\begin{cases} D^{q_1} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ D^{q_2} x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ D^{q_n} x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

其中, q_i 为 $(0,1)$ 区间中的有理数, $i = 1, 2, \dots, n$ 。将 q_i 记为 $q_i = \frac{v_i}{u_i}$, $(u_i, v_i) = 1$, $u_i, v_i \in Z^+$ 。设 u_i 的最小公倍数为 M 。

定义

$$\Delta(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^{M\alpha_1} - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda^{M\alpha_2} - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda^{M\alpha_n} - a_{nn} \end{pmatrix}$$

则当特征方程 $\det(\Delta(\lambda)) = 0$ 的所有根 λ_i 满足条件 $|\arg(\lambda)| > \frac{\pi}{2M}$ 时, 分数阶异元阶次线性时不变系统是 Lyapunov 全局渐近稳定的。

引理 1.3 分数阶积分算子的扩散模型

分数阶积分算子 ${}_t I_t^\alpha f(t)$ 等价于如下形式的扩散模型 (或称频率分布模型): [18]

$$\begin{cases} \frac{\partial z(\omega, t)}{\partial t} = -\omega z(\omega, t) + f(t), z(\omega, t_0) = z_0(\omega) \\ {}_{t_0} I_t^\alpha f(t) = \int_0^{+\infty} \mu_\alpha(\omega) z(\omega, t) d\omega \end{cases}$$

其中, $z_0(\omega)$ 为无穷维状态分布初值。

引理 1.4 Mittag-Leffler 稳定性定理^[29]

记非线性分数阶动力系统的平衡点为 $x_{eq} = 0$, D 为包含远点的区域。 $V(t, x(t)): [0, \infty) \times D \rightarrow R^+$ 为连续可微函数且满足

$$V(t, x(t)) \leq \gamma(\|x\|)$$

$$D^\alpha V(t, x(t)) \leq 0$$

式中, $\gamma(\cdot)$ 为 K 类函数, $x \in D$ 且 $0 < \alpha < 1$, 则平衡点 $x_{eq} = 0$ 是全局稳定的。

引理 1.5 Caputo 导数算子的性质

若 $x(t) \in R$ 为连续可微函数, 则对于任意的 $t \geq a$, 有以下关系式成立:

$$\frac{1}{2} {}_a^C D_t^\alpha x^2(t) = x(t) {}_a^C D_t^\alpha x(t), \quad \forall \alpha \in (0, 1)$$

1.3 分数阶控制

随着应用学科中越来越多分数阶动力学模型相继出现, 分数阶控制理论与方法应运而生, 在最近 20 年来得到了飞速发展, 并成为分数阶微积分领域中一个主流的研究方向。分数阶控制 (Fractional Control) 是分数阶微积分与控制理论相结合产生的一个新的控制理论和方法。与整数阶控制方法相比, 分数阶控制方法有如下优势: 一是继承了分数阶微分算子的快速收敛性与信息记忆性, 进一步提高控制系统性能^[10]; 二是取消了经典微积分理论中微分或积分算子的阶次是整数的限制, 更灵活地满足被控系统的期望需求, 产生整数阶控制方法很难达到或几乎不可能达到的控制目标^[11]; 三是具有更强的鲁棒性、更快的反应时间及更小的超调量^[12]。一方面, 分数阶控制理论与方法是对分数阶动力系统进行控制系统设计的理论基础; 另一方面, 分数阶控制应用于整数阶系统时, 受控系统具有分数阶系统的某些优势, 可能取得比整数阶控制更好的控制效果^[4]。

较早提出的分数阶控制方法有 TID 控制^[13]、CRONE 控制^[14, 15]、分数阶 $PI^\lambda D^\mu$ 控制^[16]及分数阶 lead-lag 补偿器^[17]。文献[18]讨论了以上 4 种方法的基本思想并比较了各自的优势。CRONE 控制器是由法国的 Oustaloup 研究团队开发的分数阶控制技术, 与传统 PID 相比, CRONE 控制器在实际应用中已显示出巨大的优势。分数阶 $PI^\lambda D^\mu$ 控制是由 Podlubny 提出的具有里程碑意义的控制方法, 对分数阶控制理论的发展具有巨大的推动作用^[19]。

分数阶微积分与现代控制理论相结合, 产生了分数阶滑模控制^[20~22]、分数阶自适应控制^[23~27]、分数阶最优控制^[28~30]等分数阶非线性控制方法。目前分数阶控制已有大量的应用实例。在最新出版的关于分数阶控制的专著^[1, 12]中, 作者提供了分数阶控制理论与方法成功应用于多种实际系统的例子并显示其优越的控制性能。文献[31]针对二自由度“四分之一”汽车模型主动悬架系统设计分数阶 $PI^\lambda D^\mu$ 控制器, 其中的参数用遗传算法 (Genetic Algorithm) 进行整定。仿真结果表明, 该控制器具有有效的隔振性能且控制性能优于传统的 PID 控制。文献[32]针对车辆非线性主动式悬吊系统设计了分数阶最优 $PI^\lambda D^\mu$ 控制器, 利用进化算法 (Evolutionary Algorithm) 整定控制器的参数。仿真实验显示了该控制方法的有效性和鲁棒性。文献[33]将分数阶前馈控制用于四轮转向汽车控制系统的设计, 得

到了分数阶横摆角速度跟踪控制器,增强了系统的鲁棒性。文献[34]将传统的模型参考自适应控制与分数阶自适应律相结合,为自动导引车辆横向系统设计了分数阶自适应控制器,通过仿真结果显示了该方法的优越性。

然而,分数阶微积分理论尤其是分数阶微分方程稳定性理论目前发展尚不成熟,但分数阶控制作为新兴的控制理论与方法仍有巨大的发展空间。文献[35~38]综述了这一领域的研究成果。从近期发表的文献来看,对于分数阶系统的研究主要分为以下几类:线性时不变系统、线性时滞系统、线性区间系统、分数阶非线性时滞系统。Matignon 于 1996 年最早给出了分数阶同元阶次线性时不变系统的稳定性定理^[39, 40],随后 Deng 等人给出了分数阶异元阶次线性时不变系统和分数阶线性时滞系统的稳定性^[41]。文献[42]给出了分数阶线性区间系统的稳定性定理。对于分数阶非线性系统动力学稳定性的研究,目前有两个主要理论方法:Mittag-Leffler 稳定性定理^[43, 44]及基于分数阶积分算子频率分布模型的间接 Lyapunov 方法^[45]。为了提出分数阶微分方程的 Lyapunov 函数,对于如何定义分数阶算子的储能与耗能问题被提上日程。文献[46, 47]基于无穷状态方法首次提出了 Riemann-Liouville 分数阶积分算子中的能量储存与耗散性质,并给出了相应的分数阶能量表达式。随后,作者又基于分数阶能量定义及相应的 Lyapunov 函数,提出了耗散函数(Dissipation function)方法^[46, 47]和能量平衡方法^[48, 49],分析了由隐导数描述的分阶系统的稳定性条件。在电路系统中,分数阶微积分算子的储能性质有了初步成果^[50~52],其中文献[51]进一步验证了基于无穷状态方法的分阶能量定义的正确性,同时指出通常用伪状态方法定义的能量形式存在问题。

1.4 分数阶混沌的控制与同步

混沌现象作为非线性动力学系统所特有的运动形式,广泛存在于物理、化学、生物学、经济学等学科中。随着分数阶电子电路的出现、物理实现的简便可行,以及分数阶微积分理论的发展,分数阶混沌的研究成为分数阶微积分领域中的一个研究热点。目前人们在众多的分数阶非线性系统中发现了多种混沌现象,如分数阶 Chua 电路^[53]、分数阶 Van der Pol 振子^[54~56]、分数阶 Lorenz 系统^[57, 58]、分数阶 Chen 系统^[59~61]、分数阶 Lü 系统^[62]、分数阶 Liu 系统^[63]、分数阶 Rössler 系统^[64, 65]、

分数阶 Arneodo 系统^[66]、分数阶 Newton–Leipnik 系统^[67~69]、分数阶 Lotka-Volterra 系统^[9, 70]、分数阶金融系统^[69, 71]、分数阶 Rucklidge 系统^[72]，等等。

分数阶混沌系统的控制与同步问题逐渐引起了分数阶控制领域研究者的广泛兴趣，并基于分数阶微分方程稳定性理论提出了多种控制方法^[9]。文献[59, 73~81]采用分数阶线性微分方程的稳定性判据针对多种分数阶混沌系统设计了线性状态反馈控制方法。文献提出了分数阶混沌系统的非线性反馈控制方法^[82~86]。文献[87, 88]设计了分数阶 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 控制方法，文献[89]设计了主动控制方法。然而，以上 4 种方法均未考虑到系统建模的不确定性及外部噪声的干扰，这在实际应用中往往是不可避免的。鲁棒控制与自适应控制是处理系统不确定性和外部扰动的两个主要控制技术。其中，滑模控制技术为保证被控系统在建模不精确情形下的稳定性提供了系统的设计方法；自适应控制技术能够估计并补偿系统的不确定性与被控模型中的未知参数^[90]。文献[20, 22, 91~93]针对分数阶混沌系统提出了分数阶滑模控制方法，文献[94]对于如何构造该形式的分数阶滑模面进行了解释。分数阶自适应滑模控制方法结合了两种控制技术的优点，既能保证控制系统的鲁棒性，又能处理参数的变化或不确定性。文献[95, 96]对分数阶混沌系统设计了分数阶自适应滑模控制律。然而正如文献[96]所指出的，目前分数阶系统的自适应滑模控制设计并不多见。

第 2 章

一类分数阶混沌系统滑模控制设计：无穷状态方法

随着分数阶微积分在电子电路中的应用、分数阶电容器与分数阶电感的出现及其物理实现的简便可行，分数阶混沌系统的动力学行为及控制问题成为一项必要的研究课题。本章通过对现有文献中出现的各种类型分数阶混沌系统的调研，提出一个统一的表达式，概括一类新型的分数阶混沌系统，然后基于无穷维状态方法和 Lyapunov 稳定性理论设计分数阶滑模控制律，最后将该方法应用于几类具体的分数阶混沌系统并通过数值仿真验证其有效性。

本章的研究内容安排如下：2.1 节提出一类新型分数阶混沌系统的统一表达式；2.2 节介绍用于分数阶系统的建模、初值问题及响应预测分析无穷状态方法；2.3 节基于无穷维状态方法和 Lyapunov 稳定性理论设计分数阶滑模控制律；2.4 节将分数阶滑模控制律设计应用于分数阶 Lorenz 系统及分数阶 Chen 系统并进行数值仿真；2.5 节对本章的内容进行了总结。

2.1 问题描述

本章研究一类由式(2-1)所描述的新型分数阶混沌系统的滑模控制设计方法。分数阶状态方程(2-1)可以用来统一描述分数阶 Lorenz 系统^[57, 58], 分数阶 Chen 系统^[59~61], 分数阶 Lü 系统^[62], 分数阶 Liu 系统^[63], 分数阶 Lotka-Volterra 系统^[9]及分数阶 Rucklidge 系统^[72], 如表 2-1 所示。

$$\begin{cases} D^{q_1} x = f(x, y, z) - \alpha x \\ D^{q_2} y = xg(x, y, z) - \beta y \\ D^{q_3} z = xh(x, y, z) - \gamma z \end{cases} \quad (2-1)$$

式中, x, y, z 为伪状态变量, α, β, γ 为已知的非负常数, q_1, q_2, q_3 为分数阶导数的阶次且满足 $q_1, q_2, q_3 \in (0, 1]$ 。 $f(\cdot), g(\cdot), h(\cdot)$ 为连续函数且满足 Lipschitz 条件, 从而保证了分数阶混沌系统式(2-1)满足解的存在唯一性条件。

本章的主要任务是设计分数阶滑模控制律 $u(t)$, 使得分数阶混沌系统式(2-1)的所有状态变量趋于零。分数阶滑模控制律的设计分为两步: 首先设计滑模面来表征被控系统期望的动力学行为; 然后设计满足滑模条件的控制律。控制律 $u(t)$ 作用于第一个方程, 则被控系统的动力学方程为

$$\begin{cases} D^{q_1} x = f(x, y, z) - \alpha x + u(t) \\ D^{q_2} y = xg(x, y, z) - \beta y \\ D^{q_3} z = xh(x, y, z) - \gamma z \end{cases} \quad (2-2)$$

表 2-1 几类分数阶混沌系统

名 称	模 型	$f(x, y, z)$	$g(x, y, z)$	$h(x, y, z)$
分数阶 Lorenz 系统	$\begin{cases} D^{q_1} x = -a(x - y) \\ D^{q_2} y = rx - y - xz \\ D^{q_3} z = -bz + xy \end{cases}$	ay	$r - z$	y
分数阶 Chen 系统*	$\begin{cases} D^{q_1} x = (c - a)y - yz + cx \\ D^{q_2} y = a(x - y) \\ D^{q_3} z = xy - bz \end{cases}$	$(c - a)y - yz + cx$	a	y

续表

名 称	模 型	$f(x, y, z)$	$g(x, y, z)$	$h(x, y, z)$
分数阶 Liu 系统	$\begin{cases} D^q x = a(y - x) \\ D^q y = bx - kxz \\ D^q z = -cz + dx^2 \end{cases}$	ay	$b - kz$	dx
分数阶 Lü 系统*	$\begin{cases} D^q x = cx - yz \\ D^q y = a(x - y) \\ D^q z = xy - bz \end{cases}$	$cx - yz$	a	y
分数阶 LotkaVolterra 系统	$\begin{cases} D^q x = ax - bxy + ex^2 - sx^2z \\ D^q y = -cy + dxy \\ D^q z = -pz + sx^2z \end{cases}$	$ax - bxy + ex^2 - sx^2z$	dx	sxz
分数阶 Rucklidge 系统*	$\begin{cases} D^q x = y \\ D^q y = -ky + \lambda x - xz \\ D^q z = -z + x^2 \end{cases}$	y	$\lambda - z$	x

注：为了符合式(2-1)的形式，我们将分数阶标注*号的系统中变量 x 与 y 的顺序调换。在控制系统的设计中，只需将控制律作用在第二个方程中即可，见 2.4.2 节中的例子。

2.2 无穷状态方法

无穷状态方法用来研究分数阶系统的建模、初值问题及响应预测，是对整数阶系统理论的推广^[45]。该方法的基础是以无穷维连续频率分布状态为特征的分数阶积分算子（Fractional Integration Operator/Fractional Integrator）理论。首先介绍分数阶积分算子的连续频率分布模型（Continuous Frequency Distributed Model），又称为扩散模型（Diffusive Model）。

根据 Riemann-Liouville 积分的定义式，函数 $v(t)$ 的分数阶积分可看成该函数与核函数 $h_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ ($0 < \alpha < 1$) 的卷积，即

$$x(t) = h_\alpha(t) * v(t) \triangleq {}_{t_0} I_t^\alpha v(t) \quad (2-3)$$

以信号与系统的观点来看，Riemann-Liouville 积分为一线性系统， $h_\alpha(t)$ 称为该系统的单位脉冲响应函数， $v(t)$ 为系统的输入或激励函数，积分值 ${}_{t_0} I_t^\alpha v(t)$ 为系统的输出，记为 $x(t)$ 。该线性系统称为分数阶积分算子：

$$v(t) \rightarrow \boxed{h_\alpha(t)} \rightarrow {}_{t_0}I_t^\alpha v(t)$$

与整数阶系统不同的是,单位脉冲响应函数 $h_\alpha(t)$ 为弱奇异函数,因此,分数阶积分算子是一种非标准卷积型因果算子。为了方便数学上的分析,借助于其 Laplace 变换 $I_\alpha(s) = \frac{1}{s^\alpha}$, 将 $h_\alpha(t)$ 进一步等价为

$$h_\alpha(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^\alpha}\right\} = \int_0^{+\infty} \mu_\alpha(\omega) e^{-\omega t} d\omega \quad (2-4)$$

式中, $\mu_\alpha(\omega) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \omega^{-\alpha}$ 。

将式 (2-4) 代入式 (2-3) 中, 由 Fubini 定理, 得

$$x(t) = \int_0^{+\infty} \mu_\alpha(\omega) d\omega \int_{t_0}^t e^{-\omega(t-\tau)} v(\tau) d\tau$$

记

$$z(\omega, t) = \int_{t_0}^t e^{-\omega(t-\tau)} v(\tau) d\tau \quad (2-5)$$

则 $z(\omega, t)$ 满足如下初值为零的常微分方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial z(\omega, t)}{\partial t} = -\omega z(\omega, t) + v(t) \\ z(\omega, t_0) = 0 \end{cases}$$

从而得到

$$x(t) = \int_0^{+\infty} \mu_\alpha(\omega) z(\omega, t) d\omega$$

因此, 分数阶积分算子 ${}_{t_0}I_t^\alpha v(t)$ 等价于如下无穷维整数阶系统:

$$\begin{cases} \frac{\partial z(\omega, t)}{\partial t} = -\omega z(\omega, t) + v(t), \quad z(\omega, t_0) = 0 \\ x(t) = {}_{t_0}I_t^\alpha v(t) = \int_0^{+\infty} \mu_\alpha(\omega) z(\omega, t) d\omega \end{cases}$$

上式称为分数阶积分算子的连续频率分布模型或扩散模型, 输入为 $v(t)$, 输出为 $x(t)$, $z(\omega, t)$ 称为无穷维分布状态变量或内部状态变量。由于 $x(t)$ 实际上是变量 $z(\omega, t)$ 的加权积分, 因此, $x(t)$ 只是分数阶积分算子的伪状态变量, $z(\omega, t)$ 为

真实状态变量；对于分数阶微分方程或分数阶动力系统也是如此。

基于分数阶积分算子的频率分布模型，分数阶系统的初值表示为 $z(\omega, t_0)$ ，该无穷维状态初值可以作为分数阶系统的初始函数。

2.3 分数阶滑模控制设计

2.3.1 分数阶滑模面设计

设计分数阶滑模面 S 为

$$s(t) = D^{q_1-1}x(t) + D^{-1}\phi(t) \quad (2-6)$$

式中， $\phi(t) = yg(x, y, z) + zh(x, y, z) + \alpha x$ 。

下面证明滑模面的动力学稳定性。对式(2-6)中的分数阶滑模面求关于时间的一阶导数，得

$$\dot{s}(t) = D^{q_1}x(t) + \phi(t) \quad (2-7)$$

当系统状态保持在滑模面上运动时，滑模面满足如下两个条件：

$$s = 0, \quad \dot{s} = 0$$

由此得到滑模面的动力学方程

$$\begin{cases} D^{q_1}x = -yg(x, y, z) - zh(x, y, z) - \alpha x \\ D^{q_2}y = xg(x, y, z) - \beta y \\ D^{q_3}z = xh(x, y, z) - \gamma z \end{cases} \quad (2-8)$$

下面证明滑模面的动力学方程(2-8)是全局渐近稳定的。根据分数阶积分算子的频率分布模型，分数阶滑模面的动力学方程(2-8)等价于以下无穷维整数阶微分方程：

$$\begin{cases} \frac{\partial z_1(\omega, t)}{\partial t} = -\omega z_1(\omega, t) - yg(x, y, z) - zh(x, y, z) - \alpha x \\ \frac{\partial z_2(\omega, t)}{\partial t} = -\omega z_2(\omega, t) + xg(x, y, z) - \beta y \\ \frac{\partial z_3(\omega, t)}{\partial t} = -\omega z_3(\omega, t) + xh(x, y, z) - \gamma z \end{cases} \quad (2-9)$$

式中,

$$x(t) = \int_0^\infty \mu_1(\omega) z_1(\omega, t) d\omega, \mu_1(\omega) = \frac{\sin(q_1\pi)}{\pi} \omega^{-q_1} \quad (2-10)$$

$$y(t) = \int_0^\infty \mu_2(\omega) z_2(\omega, t) d\omega, \mu_2(\omega) = \frac{\sin(q_2\pi)}{\pi} \omega^{-q_2} \quad (2-11)$$

$$z(t) = \int_0^\infty \mu_3(\omega) z_3(\omega, t) d\omega, \mu_3(\omega) = \frac{\sin(q_3\pi)}{\pi} \omega^{-q_3} \quad (2-12)$$

在上述频率分布模型式(2-10)、式(2-11)、式(2-12)中, $z_1(\omega, t)$ 、 $z_2(\omega, t)$ 、 $z_3(\omega, t)$ 称为分数阶系统的真实状态变量, $x(t)$ 、 $y(t)$ 、 $z(t)$ 称为伪状态变量。

定义如下两类 Lyapunov 函数:

- 对应基础频率 ω 的单频 Lyapunov 函数 $v_i(\omega, t)$

$$v_i(\omega, t) = \frac{1}{2} z_i^2, \quad i = 1, 2, 3$$

- 单频 Lyapunov 函数 $v_i(\omega, t)$ 以 $\mu_i(\omega)$ 为权重系数的加权和 $V_i(t)$

$$V_i(t) = \int_0^\infty \mu_i(\omega) v_i(\omega, t) d\omega = \frac{1}{2} \int_0^\infty \mu_i(\omega) z_i^2(\omega, t) d\omega, \quad i = 1, 2, 3$$

首先, 求 $V_1(\omega, t)$ 关于时间的一阶导数, 得

$$\frac{dV_1(t)}{dt} = \int_0^\infty \mu_1(\omega) z_1(\omega, t) \frac{\partial z_1(\omega, t)}{\partial t} d\omega \quad (2-13)$$

将系统(2-9)的第一个方程代入式(2-13), 得

$$\begin{aligned}
\frac{dV_1(t)}{dt} &= \int_0^\infty \mu_1(\omega) z_1 (-\omega z_1 - yg - zh - \alpha x) d\omega \\
&= -\int_0^\infty \mu_1(\omega) \omega z_1^2 d\omega + \int_0^\infty \mu_1(\omega) z_1 (-yg - zh - \alpha x) d\omega \\
&= -\int_0^\infty \mu_1(\omega) \omega z_1^2 d\omega + (-yg - zh - \alpha x) \int_0^\infty \mu_1(\omega) z_1 d\omega
\end{aligned} \tag{2-14}$$

将式(2-10)代入式(2-14)的最后一项,得

$$\frac{dV_1(t)}{dt} = -\int_0^\infty \mu_1(\omega) \omega z_1^2 d\omega + x(-yg - zh - \alpha x)$$

根据同样的运算过程,得到

$$\begin{aligned}
\frac{dV_2(t)}{dt} &= -\int_0^\infty \mu_2(\omega) \omega z_2^2 d\omega + y(xg - \beta y) \\
\frac{dV_3(t)}{dt} &= -\int_0^\infty \mu_3(\omega) \omega z_3^2 d\omega + z(xh - \gamma z)
\end{aligned}$$

最后定义

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) + V_3(t)$$

则有

$$\frac{dV(t)}{dt} = -\sum_{i=1}^3 \int_0^\infty \mu_i(\omega) \omega z_i^2 d\omega - (\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2)$$

根据 Lyapunov 稳定性定理, $x, y, z \rightarrow 0$ 。

根据以上推导,得到如下结论:

定理 2.1 对于分数阶新型混沌系统(2-1),设计分数阶滑模面式(2-6),则滑模动力学方程(2-8)是全局渐近稳定性的。

2.3.2 分数阶滑模控制律设计

设计如下 Lyapunov 函数:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2} s^2 \tag{2-15}$$

对式 (2-15) 求关于时间的一阶导数, 得

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= s\dot{s} \\ &= s(D^q x + \phi) \\ &= s[f(x, y, z) - \alpha x + u(t) + yg(x, y, z) + zh(x, y, z) + \alpha x]\end{aligned}\quad (2-16)$$

选择控制律为

$$u(t) = -f(x, y, z) - yg(x, y, z) - zh(x, y, z) - k_1 \text{sign}(s) - k_2 s \quad (2-17)$$

式中, k 为待定的正常数。

$$\text{sign}(s) = \begin{cases} 1, s > 0 \\ 0, s = 0 \\ -1, s < 0 \end{cases}$$

将控制律 (2-17) 代入式 (2-16), 得

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= s[-k_1 \text{sign}(s) - k_2 s] \\ &= -k_1 |s| - k_2 s^2 \\ &= -k_1 \sqrt{V} - k_2 V\end{aligned}$$

由此得到 Lyapunov 函数 V 在有限时间内趋于零, 因而, 滑模面的状态在有限时间内也趋于零。更进一步得到, 分数阶混沌系统的状态 $x(t), y(t), z(t)$ 全局渐近趋于零。

通过上述讨论, 得到以下结论:

定理 2.2 在分数阶滑模控制律 (2-17) 的作用下, 分数阶新型混沌系统 (2-1) 的 3 个状态变量 $x(t), y(t), z(t)$ 全局渐近趋于零。

2.3.3 分数阶滑模自适应控制律设计

本节考虑分数阶混沌系统 (2-1) 第一个状态方程中存在不确定性 $\Delta f(x, y, z)$ 与外部扰动 $d(t)$ 时的控制问题。假设 $\Delta f(x, y, z)$ 和 $d(t)$ 有界, 即 $|\Delta f(x, y, z)| < \theta_1$, $|d(t)| < \theta_2$, 其中 θ_1 和 θ_2 为待估计的非负常数。下面将采用自适应技术估计未知常

数 θ_1 和 θ_2 。记 $\hat{\theta}_1$ 为 θ_1 的估计值， $\hat{\theta}_2$ 为 θ_2 的估计值。

被控系统的状态方程为

$$\begin{cases} D^{q_1} x = f(x, y, z) - \alpha x + \Delta f + d + u(t) \\ D^{q_2} y = xg(x, y, z) - \beta y \\ D^{q_3} z = xh(x, y, z) - \gamma z \end{cases} \quad (2-18)$$

为了设计控制律，选择如下 Lyapunov 函数：

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2} \left[s^2 + \frac{1}{\mu_1} (\hat{\theta}_1 - \theta_1)^2 + \frac{1}{\mu_2} (\hat{\theta}_2 - \theta_2)^2 \right] \quad (2-19)$$

求 $V(x, y, z)$ 关于时间的一阶导数，得

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= s\dot{s} + \frac{1}{\mu_1} (\hat{\theta}_1 - \theta_1) \dot{\hat{\theta}}_1 + \frac{1}{\mu_2} (\hat{\theta}_2 - \theta_2) \dot{\hat{\theta}}_2 \\ &= s(D^q x + \phi) + \frac{1}{\mu_1} (\hat{\theta}_1 - \theta_1) \dot{\hat{\theta}}_1 + \frac{1}{\mu_2} (\hat{\theta}_2 - \theta_2) \dot{\hat{\theta}}_2 \\ &= s(D^q x + \phi) + \frac{1}{\mu_1} (\hat{\theta}_1 - \theta_1) \dot{\hat{\theta}}_1 + \frac{1}{\mu_2} (\hat{\theta}_2 - \theta_2) \dot{\hat{\theta}}_2 \\ &= s \left[f(x, y, z) - \alpha x + \Delta f + d + u(t) + yg(x, y, z) + zh(x, y, z) + \alpha x \right] + \\ &\quad \frac{1}{\mu_1} (\hat{\theta}_1 - \theta_1) \dot{\hat{\theta}}_1 + \frac{1}{\mu_2} (\hat{\theta}_2 - \theta_2) \dot{\hat{\theta}}_2 \end{aligned} \quad (2-20)$$

设计如下控制律及自适应律：

$$\begin{aligned} u(t) &= -f(x, y, z) - yg(x, y, z) - zh(x, y, z) - \\ &\quad (\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 + k_1) \text{sign}(s) - k_2 s \end{aligned} \quad (2-21)$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{\theta}}_1 = \mu_1 |s| \\ \dot{\hat{\theta}}_2 = \mu_2 |s| \end{cases} \quad (2-22)$$

将控制律 (2-21) 与自适应律 (2-22) 代入式 (2-20) 得

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= s \left[\Delta f + d - (\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 + k_1) \text{sign}(s) - k_2 s \right] + (\hat{\theta}_1 - \theta_1) |s| + (\hat{\theta}_2 - \theta_2) |s| \\
&= (\Delta f + d) s - (\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 + k_1) |s| + (\hat{\theta}_1 - \theta_1) |s| + (\hat{\theta}_2 - \theta_2) |s| - k_2 s^2 \\
&\quad (|\Delta f| + |d|) |s| - (\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 + k_1) |s| + (\hat{\theta}_1 - \theta_1) |s| + (\hat{\theta}_2 - \theta_2) |s| - k_2 s^2 \quad (2-23) \\
&\quad (\theta_1 + \theta_2) |s| - (\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 + k_1) |s| + (\hat{\theta}_1 - \theta_1) |s| + (\hat{\theta}_2 - \theta_2) |s| - k_2 s^2 \\
&= -k_1 |s| - k_2 s^2 \\
&= -k_1 \sqrt{V} - k_2 V
\end{aligned}$$

根据 Lyapunov 稳定性定理, $s \rightarrow 0$, 从而 $x, y, z \rightarrow 0$ 。

根据以上推导, 得到如下结论:

定理 2.3 对于分数阶混沌系统 (2-1), 当存在不确定性和外部干扰时, 在滑模控制律 (2-21) 和自适应律 (2-22) 的作用下, 其运动状态 x, y, z 渐近趋于零。

2.4 应用实例及数值仿真

2.4.1 分数阶 Lorenz 系统滑模控制律设计与数值仿真

本节将提出的基于频率分布模型理论的分数阶滑控制和自适应控制设计方法应用于分数阶 Lorenz 系统, 并通过数值仿真验证控制律设计方法的有效性和正确性。

分数阶 Lorenz 系统的数学模型为

$$\begin{cases} D^q x = -a(x - y) \\ D^q y = rx - y - xz \\ D^q z = -bz + xy \end{cases}$$

式中, $a=10$, $r=28$, $b=8/3$ 。

根据上述参数取值, 分数阶 Lorenz 系统存在 3 个平衡点, 分别为 $E_1 = (0, 0, 0)$, $E_2 = (6\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, 5/3)$, $E_3 = (-6\sqrt{2}, -6\sqrt{2}, 5/3)$ 。

假设分数阶 Lorenz 系统的初始条件以脉冲的形式给出, 取值为

$(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$ ，分数阶导数的阶次取值为 $q_1 = q_2 = q_3 = 0.993$ ，混沌特性如图 2-1 所示。

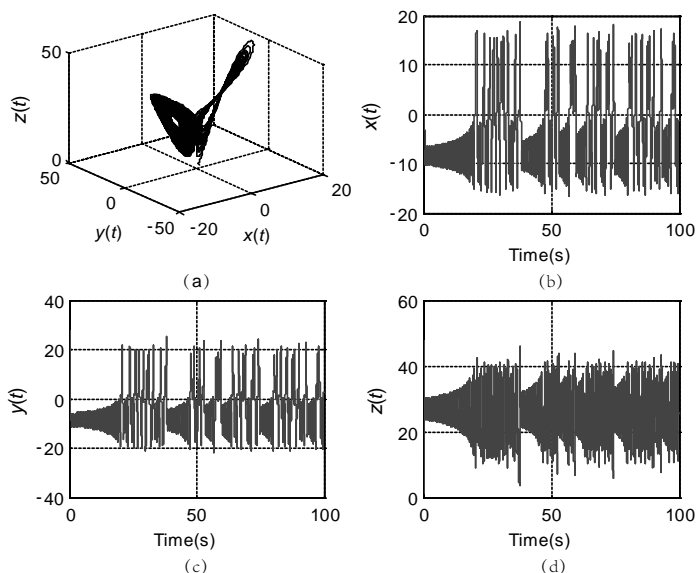


图 2-1 分数阶 Lorenz 混沌系统的运动状态，仿真时间 $T_{\text{sim}} = 100\text{s}$ ，仿真步长 $h = 0.005$ ：(a) x - y - z 空间相图；(b) x - t 曲线；(c) y - t 曲线；(d) z - t 曲线

仿真程序包括主程序 FOLoren.m 和调用程序 demo_FOLoren.m，其中 FOLoren.m 的源程序代码如下：

```
function [T, Y]=FOLorenz(parameters, orders, TSim, Y0)
% time step:
h=0.005;
% number of calculated mesh points:
n=round(TSim/h);
%orders of derivatives, respectively:
q1=orders(1); q2=orders(2); q3=orders(3);
% constants of Lorenz's system:
sigma=parameters(1); rho=parameters(2); beta=parameters(3);
% binomial coefficients calculation:
cp1=1; cp2=1; cp3=1;
for j=1:n
```

```

        c1(j)=(1-(1+q1)/j)*cp1;
        c2(j)=(1-(1+q2)/j)*cp2;
        c3(j)=(1-(1+q3)/j)*cp3;
        cp1=c1(j); cp2=c2(j); cp3=c3(j);
    end
    % initial conditions setting:
    x(1)=Y0(1); y(1)=Y0(2); z(1)=Y0(3);
    % calculation of phase portraits /numerical solution/:
    for i=2:n
        x(i)=(sigma*(y(i-1)-x(i-1)))*h^q1 - memo(x, c1, i);
        y(i)=(x(i)*(rho-z(i-1))-y(i-1))*h^q2 - memo(y, c2, i);
        z(i)=(x(i)*y(i)-beta*z(i-1))*h^q3 - memo(z, c3, i);
    end
    for j=1:n
        Y(j,1)=x(j);
        Y(j,2)=y(j);
        Y(j,3)=z(j);
    end
    end
    T=h:h:TSim;

```

程序 `demo_Lorenz.m` 的源程序代码如下:

```

[t, y]=FOLorenz([10 28 8/3],[0.993 0.993 0.993],100,[1 1 1]);
figure(4);
subplot(2,2,1);
plot3(y(:,1), y(:,2), y(:,3), 'k');
xlabel('x(t)'); ylabel('y(t)'); zlabel('z(t)');
title('a')
grid;
subplot(2,2,2);
plot(t,y(:,1));
xlabel('Time(sec)');
ylabel('x(t)');
title('b')
grid on;
subplot(2,2,3);
plot(t,y(:,2));
xlabel('Time(sec)');
ylabel('y(t)')

```

```

title('c')
grid on;
subplot(2,2,4);
plot(t,y(:,3));
xlabel('Time(sec)');
ylabel('z(t)')
title('d')
grid on;

```

首先,考虑系统(2-1)不存在不确定性和外部干扰情形的滑模控制设计问题,将控制律作用于系统的第一个状态方程,则受控系统的数学模型为

$$\begin{cases} D^q x = -a(x-y) + u(t) \\ D^q y = rx - y - xz \\ D^q z = -bz + xy \end{cases}$$

根据式(2-6),设计分数阶滑模面为

$$s(t) = D^q x(t) + D^{-1}\phi(t)$$

式中, $\phi(t) = ry(t) + ax(t)$ 。

根据式(2-17),设计控制律为

$$u(t) = -(a+r)y(t) - k_1 \text{sign}(s) - k_2 s$$

设定控制增益 $k_1 = 0.05$, $k_2 = 0.1$, 数值仿真如图 2-2 所示。显然, 分数阶滑模控制律(2-17)的效果理想。

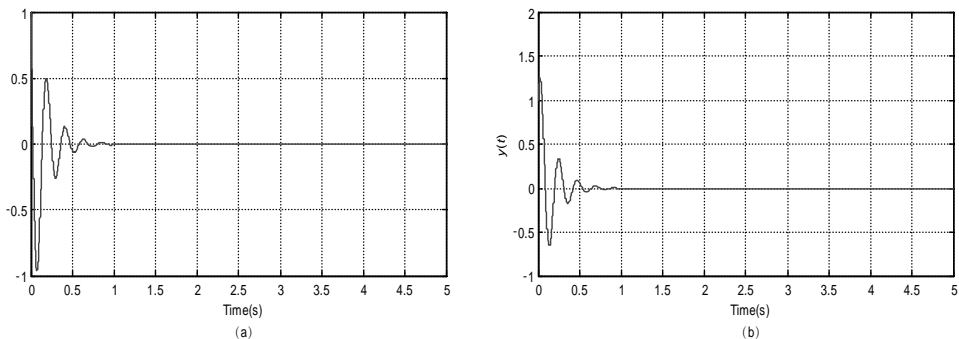


图 2-2 分数阶 Lorenz 混沌系统的滑模控制

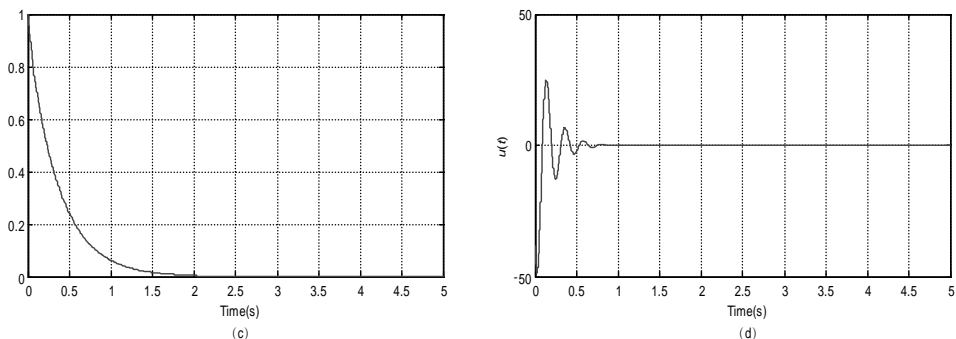


图 2-2 分数阶 Lorenz 混沌系统的滑模控制 (续)

仿真程序包括 4 部分：主程序 SlidingLorenzs.m、memo.m、memos.m 及调用程序 demo_SlidingLorenzs.m。其中，SlidingLorenzs.m 的源程序代码如下：

```
function [T, Y]=SlidingLorenzs(parameters, orders, TSim, Y0)
% time step:
h=0.0005;
% number of calculated mesh points:
n=round(TSim/h);
%orders of derivatives, respectively:
q1=orders(1); q2=orders(2); q3=orders(3);
% constants of Lorenz's system:
sigma=parameters(1); rho=parameters(2); beta=parameters(3);
k1=parameters(4); k2=parameters(5);
% binomial coefficients calculation:
cp1=1; cp2=1; cp3=1;
for j=1:n
    c1(j)=(1-(1+q1)/j)*cp1;
    c2(j)=(1-(1+q2)/j)*cp2;
    c3(j)=(1-(1+q3)/j)*cp3;
    cp1=c1(j); cp2=c2(j); cp3=c3(j);
end
% initial conditions setting:
s(1)=Y0(1); x(1)=Y0(2); y(1)=Y0(3); z(1)=Y0(4); u(1)=Y0(5);
% calculation of phase portraits /numerical solution/:
for i=2:n s(i)=1/142.2868*h^(1-q1)*memos(x,i-1)+sigma*h*memos
(x,i)+rho*h*memos(y,i);
    x(i)=(-sigma*x(i-1)-rho*y(i-1)-k1*sign(s(i))-k2*s(i))*h^q1-memo(x,
```

```

cl, i);
    y(i)=(x(i)*(rho-z(i-1))-y(i-1))*h^q2 - memo(y, c2, i);
    z(i)=(x(i)*y(i)-beta*z(i-1))*h^q3 - memo(z, c3, i);
    u(i)=-(sigma+rho)*y(i)-k1*sign(s(i))-k2*s(i);
end
for j=1:n
    Y(j,1)=s(j);
    Y(j,2)=x(j);
    Y(j,3)=y(j);
    Y(j,4)=z(j);
    Y(j,5)=u(j);
end
T=h:h:TSim;

```

memo.m 的源程序代码如下：

```

function [yo] = memo(r, c, k)
temp = 0;
for j=1:k-1
    temp = temp + c(j)*r(k-j);
end
yo = temp;

```

memos.m 的源程序代码如下：

```

function [yo] = memos( c, k)
temp = 0;
for j=1:k-1
    temp = temp + c(j);
end
yo = temp;

```

SlidingLorenzs.m 的源程序代码如下：

```

[t, y]=SlidingLorenzs([10 28 8/3 0.05 0.1 ],[0.993 0.993 0.993],5,[1
1 1 1 -38]);
figure(4);
subplot(2,2,1);
plot(t,y(:,2));
axis([0 5 -1 1]);
xlabel('Time(sec)');

```

```

ylabel('x(t)');
title('a')
grid on;
subplot(2,2,2);
plot(t,y(:,3));
axis([0 5 -1 2]);
xlabel('Time(sec)');
ylabel('y(t)')
title('b')
grid on;
subplot(2,2,3);
plot(t,y(:,4));
axis([0 5 0 1]);
xlabel('Time(sec)');
ylabel('z(t)')
title('c')
grid on;
subplot(2,2,4);
plot(t,y(:,5));
axis([0 5 -50 50]);
xlabel('Time(sec)');
ylabel('u(t)')
title('d')
grid on;

```

下面考虑分数阶 Lorenz 混沌系统存在不确定性和外部扰动情形的滑模控制律设计, 受控对象的数学模型为

$$\begin{cases} D^{q_1} x = -a(x - y) + \Delta f + d + u(t) \\ D^{q_2} y = rx - y - xz \\ D^{q_3} z = -bz + xy \end{cases}$$

根据式 (2-21) 和式 (2-22), 控制律和自适应律分别为

$$u(t) = -(a + r)y - (\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 + k_1)\text{sign}(s) - k_2 s$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{\theta}}_1 = \mu_1 |s| \\ \dot{\hat{\theta}}_2 = \mu_2 |s| \end{cases}$$

分别选取增益 $k_1 = k_2 = 0.02$ ，自适应律系数 $\mu_1 = 0.03$ ， $\mu_2 = 0.02$ ，自适应参数初始值 $\theta_1(0) = 0.03$ ， $\theta_2(0) = 0.02$ ，系统不确定性 $\Delta f = 0.1 - 0.1\sin(\pi x)$ ，以及外部扰动 $d(t) = 0.1\cos t$ 。分数阶 Lorenz 系统的滑模控制系统的数值仿真效果如图 2-3 所示。

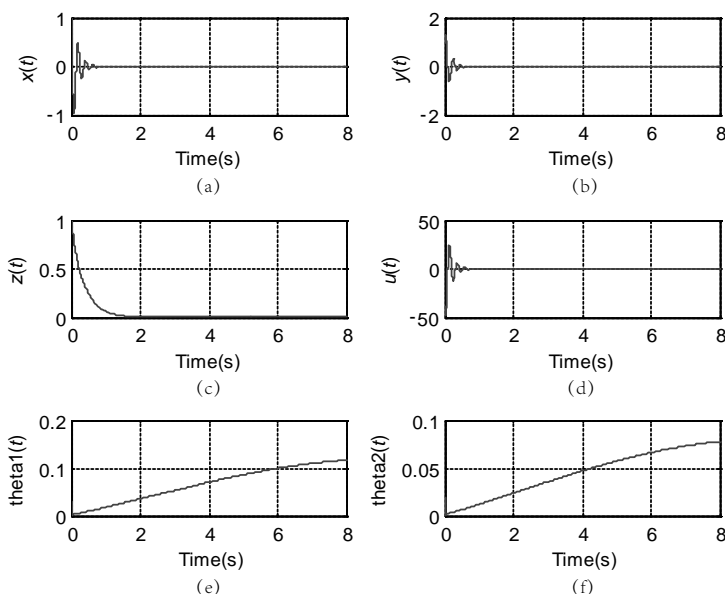


图 2-3 分数阶 Lorenz 系统存在不确定和外部干扰时的自适应滑模控制系统
(theta1 表示 θ_1 ，theta2 表示 θ_2)

仿真程序包括主程序 AdaptiveSlidingLorenzs.m、memo.m、memos.m，以及调用程序 demo_AdaptiveSlidingLorenzs.m。其中，AdaptiveSlidingLorenzs.m 的源程序代码如下：

```
function [T, Y]=AdaptiveSlidingLorenzs(parameters, orders, TSim, Y0)
% time step:
h=0.0005;
% number of calculated mesh points:
n=round(TSim/h);
%orders of derivatives, respectively:
q1=orders(1); q2=orders(2); q3=orders(3);
% constants of Lorenz's system:
sigma=parameters(1); rho=parameters(2); beta=parameters(3); k1=
```

```

parameters(4);k2=parameters(5);mu=parameters(6);gamma=parameters(7);
% binomial coefficients calculation:
cp1=1; cp2=1; cp3=1;
for j=1:n
    c1(j)=(1-(1+q1)/j)*cp1;
    c2(j)=(1-(1+q2)/j)*cp2;
    c3(j)=(1-(1+q3)/j)*cp3;
    cp1=c1(j); cp2=c2(j); cp3=c3(j);
end
% initial conditions setting:
s(1)=Y0(1);x(1)=Y0(2); y(1)=Y0(3); z(1)=Y0(4); theta1(1)=Y0(5);
theta2(1)=Y0(6);u(1)=Y0(7);
% calculation of phase portraits /numerical solution/:
for i=2:n s(i)=1/142.2868*h^(1-q1)*memos(x,i-1)+sigma*h*memos(x,i)+
rho*h*memos(y,i);
    x(i)=(0.1-0.1*sin(pi*x(i-1))+0.1*cos(i)-sigma*x(i-1)-rho*y(i-1)-
(k1+theta1(i-1)+theta2(i-1))*sign(s(i))-k2*s(i))*h^q1 - memo(x, c1, i);
    y(i)=(x(i)*(rho-z(i-1))-y(i-1))*h^q2 - memo(y, c2, i);
    z(i)=(x(i)*y(i)-beta*z(i-1))*h^q3 - memo(z, c3, i);
    theta1(i)=mu*h*memos(abs(s),i);
    theta2(i)=gamma*h*memos(abs(s),i);
u(i)=-(sigma+rho)*y(i)-(theta1(i)+theta2(i)+k1)*sign(s(i))-k2*s(i);
end
for j=1:n
    Y(j,1)=s(j);
    Y(j,2)=x(j);
    Y(j,3)=y(j);
    Y(j,4)=z(j);
    Y(j,5)=theta1(j);
    Y(j,6)=theta2(j);
    Y(j,7)=u(j);
end
T=h:h:TSim;

```

调用程序 demo_AdaptiveSlidingLorenzs.m 的源程序代码如下:

```

[t, y]=AdaptiveSlidingLorenzs([10 28 8/3 0.02 0.02 0.03 0.02],[0.993
0.993 0.993],8,[1 1 1 1 0.03 0.02 -38]);
subplot(3,2,1);

```



```
plot(t,y(:,2));
xlabel('Time(sec)');
ylabel('x(t)');
title('a')
grid on;
subplot(3,2,2);
plot(t,y(:,3));
xlabel('Time(sec)');
ylabel('y(t)');
title('b')
grid on;
subplot(3,2,3);
plot(t,y(:,4));
xlabel('Time(sec)');
ylabel('z(t)');
title('c')
grid on;
subplot(3,2,4);
plot(t,y(:,7));
xlabel('Time(sec)');
ylabel('u(t)');
title('d')
grid on;
subplot(3,2,5);
plot(t,y(:,5));
xlabel('Time(sec)');
ylabel('theta1(t)');
title('e')
grid on;subplot(3,2,2);
subplot(3,2,6);
plot(t,y(:,6));
xlabel('Time(sec)');
ylabel('theta2(t)');
title('f')
grid on;
```

2.4.2 分数阶 Chen 系统的滑模控制律设计与仿真

分数阶 Chen 系统的数学模型为

$$\begin{cases} D^{q_1} x = a(y - x) \\ D^{q_2} y = (c - a)x - xz + cy \\ D^{q_3} z = xy - bz \end{cases}$$

式中, $a = 35$, $b = 3$, $c = 28$ 。

根据上述参数取值, 分数阶 Chen 系统存在 3 个平衡点, 分别为 $E_1 = (0, 0, 0)$ 、 $E_2 = (3\sqrt{7}, 3\sqrt{7}, 21)$ 及 $E_3 = (-3\sqrt{7}, -3\sqrt{7}, 21)$ 。

数值仿真中分别取分数阶 Chen 系统状态方程中的阶次为 $q_1 = q_2 = q_3 = 0.9$, 初始条件 $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$, 仿真时间 $T_{\text{sim}} = 100\text{s}$, 仿真步长 $h = 0.005$ 。混沌特性如图 2-4 所示。

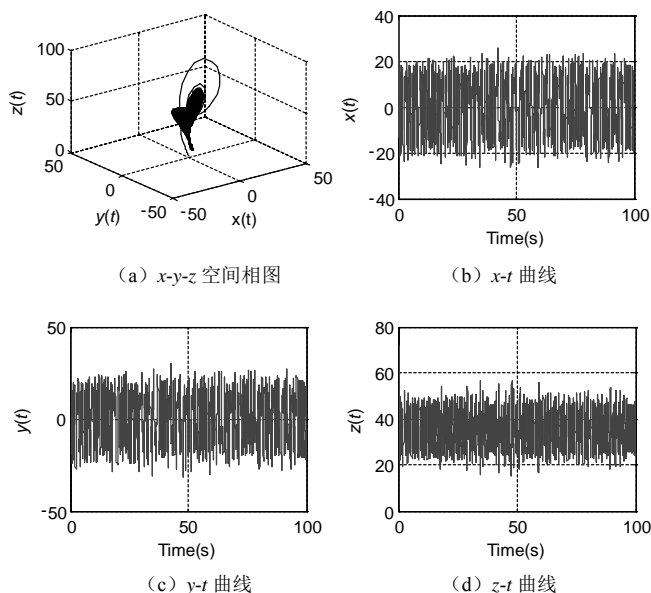


图 2-4 分数阶 Chen 系统的运动轨迹

仿真程序包括主程序 FOChen.m 和调用程序 demo_ FOChen.m。其中, FOChen.m 的源程序代码如下:

```

function [T, Y]=FOChen(parameters, orders, TSim, Y0)
% time step:
h=0.005;
% number of calculated mesh points:
n=round(TSim/h);
%orders of derivatives, respectively:
q1=orders(1); q2=orders(2); q3=orders(3);
% constants of Chen's system:
a=parameters(1); b=parameters(2);
c=parameters(3); d=parameters(4);
% binomial coefficients calculation:
cp1=1; cp2=1; cp3=1;
for j=1:n
    c1(j)=(1-(1+q1)/j)*cp1;
    c2(j)=(1-(1+q2)/j)*cp2;
    c3(j)=(1-(1+q3)/j)*cp3;
    cp1=c1(j); cp2=c2(j); cp3=c3(j);
end
% initial conditions setting:
x(1)=Y0(1); y(1)=Y0(2); z(1)=Y0(3);
% calculation of phase portraits /numerical solution/:
for i=2:n
    x(i)=(a*(y(i-1)-x(i-1)))*h^q1 - memo(x, c1, i);
    y(i)=(-d*x(i)-x(i)*z(i-1)+c*y(i-1))*h^q2 - memo(y, c2, i);
    z(i)=(x(i)*y(i)-b*z(i-1))*h^q3 - memo(z, c3, i);
end
for j=1:n
    Y(j,1)=x(j);
    Y(j,2)=y(j);
    Y(j,3)=z(j);
end
T=h:h:TSim;

```

调用程序 demo_FOChen.m 的源程序代码如下:

```

[t, y]=FOChen([35 3 28 -7], [0.9 0.9 0.9], 100, [1 1 1]);
figure(4);
subplot(2,2,1);
plot3(y(:,1), y(:,2), y(:,3), 'k');

```

```

xlabel('x(t)'); ylabel('y(t)'); zlabel('z(t)');
title('a')
grid;
subplot(2,2,2);
plot(t,y(:,1));
xlabel('Time(sec)');
ylabel('x(t)');
title('b')
grid on;
subplot(2,2,3);
plot(t,y(:,2));
xlabel('Time(sec)');
ylabel('y(t)');
title('c')
grid on;
subplot(2,2,4);
plot(t,y(:,3));
xlabel('Time(sec)');
ylabel('z(t)');
title('d')
grid on;

```

首先, 考虑标称系统的滑模控制设计问题, 将控制律作用于分数阶 Chen 系统的第二个状态方程, 则受控系统的数学模型为

$$\begin{cases} D^q x = a(y - x) \\ D^{q_2} y = (c - a)x - xz + cy + u(t) \\ D^{q_3} z = xy - bz \end{cases}$$

根据式 (2-6), 设计分数阶滑模面为

$$s(t) = D^q y(t) + D^{-1}\varphi(t)$$

式中, $\varphi(t) = ax + cy + xz$ 。

根据式 (2-17), 设计控制律为

$$u(t) = -cx - 2cy - k_1 \text{sign}(s) - k_2 s$$

设定 $k_1 = k_2 = 0.1$ ，数值仿真如图 2-5 所示。显然，分数阶滑模控制律作用于分数阶 Chen 系统时的效果理想。

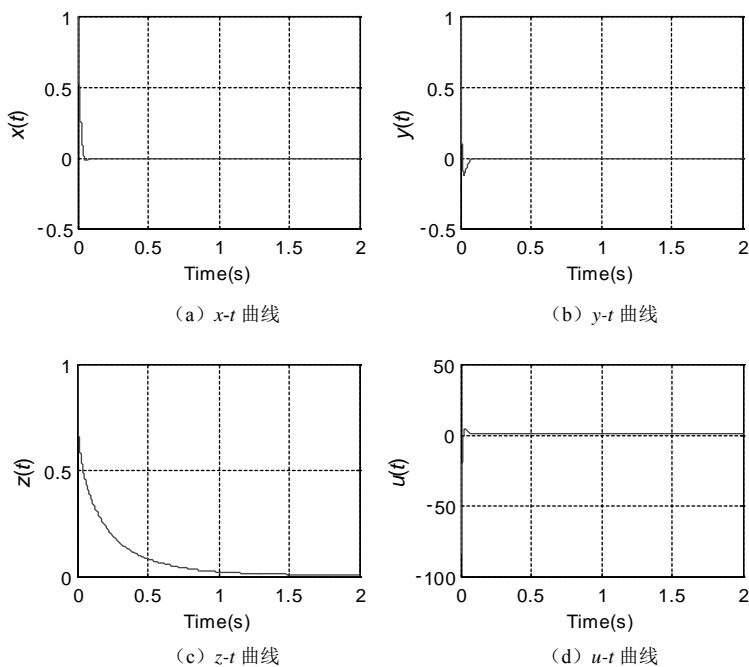


图 2-5 分数阶 Chen 系统的滑模控制效果

仿真程序包括主程序 SlidingChens.m、memo.m、memos.m 及调用程序 demo_SlidingChen.m。其中，SlidingChens.m 的源程序代码如下：

```
function [T, Y]=SlidingChenS(parameters, orders, TSim, Y0)
% time step:
h=0.0005;
% number of calculated mesh points:
n=round(TSim/h);
%orders of derivatives, respectively:
q1=orders(1); q2=orders(2); q3=orders(3);
% constants of Chen's system:
a=parameters(1); b=parameters(2);
c=parameters(3);
k1=parameters(4);
k2=parameters(5);
```

```

% binomial coefficients calculation:
cp1=1; cp2=1; cp3=1;
for j=1:n
    c1(j)=(1-(1+q1)/j)*cp1;
    c2(j)=(1-(1+q2)/j)*cp2;
    c3(j)=(1-(1+q3)/j)*cp3;
    cp1=c1(j); cp2=c2(j); cp3=c3(j);
end
% initial conditions setting:
s(1)=Y0(1); x(1)=Y0(2); y(1)=Y0(3); z(1)=Y0(4); u(1)=Y0(5);
% calculation of phase portraits /numerical solution/:
for i=2:n
    s(i)=1/gamma(1-q1)*h^(1-q1)*memos(x,i-1)+a*h*memos(x,i)+c*h*memos
(y,i)+h*memoxz(x,z,i);
    x(i)=(a*(y(i-1)-x(i-1)))*h^q1 - memo(x, c1, i);
    y(i)=(-a*x(i)-x(i)*z(i-1)-c*y(i-1)-k1*sign(s(i))-k2*s(i))*
h^q2 - memo(y, c2, i);
    z(i)=(x(i)*y(i)-b*z(i-1))*h^q3 - memo(z, c3, i);
    u(i)=-c*x(i)-2*c*y(i)-k1*sign(s(i))-k2*s(i);
end
for j=1:n
    Y(j,1)=s(j);
    Y(j,2)=x(j);
    Y(j,3)=y(j);
    Y(j,4)=z(j);
    Y(j,5)=u(j);
end
T=h:h:TSim;

```

demo_SlidingChen.m 的源程序代码如下:

```

[t, y]=SlidingChenS([35 3 28 0.1 0.1], [0.9 0.9 0.9], 2, [1 1 1 1
-84.1]);
figure(4);
subplot(2,2,1);
plot(t,y(:,2));
xlabel('Time(sec)');
ylabel('x(t)')
title('a')

```

```

grid on;
subplot(2,2,2);
plot(t,y(:,3));
xlabel('Time(sec)');
ylabel('y(t)')
title('b')
grid on;
subplot(2,2,3);
plot(t,y(:,4));
xlabel('Time(sec)');
ylabel('z(t)')
title('c')
grid on;
subplot(2,2,4);
plot(t,y(:,5));
xlabel('Time(sec)');
ylabel('u(t)')
title('d')
grid on;

```

下面考虑分数阶 Chen 混沌系统存在不确定性和外部扰动情形的滑模控制律设计，受控对象的数学模型为

$$\begin{cases} D^q x = a(y - x) \\ D^q y = (c - a)x - xz + cy + \Delta f + d + u \\ D^q z = xy - bz \end{cases}$$

根据式(2-21)和式(2-22)的设计，分数阶滑模控制律与自适应律分别取

$$u(t) = -cx - 2cy - (\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 + k_1) \text{sign}(s) - k_2 s$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{\theta}}_1 = \mu_1 |s| \\ \dot{\hat{\theta}}_2 = \mu_2 |s| \end{cases}$$

数值仿真中，滑模控制律中的增益取 $k_1 = 0.175$ ， $k_2 = 0.1$ ，自适应律中的参数取 $\mu_1 = 0.2$ ， $\mu_2 = 0.2$ ，自适应律的初值取 $\theta_1(0) = 0.2$ ， $\theta_2(0) = 0.2$ ，系统不确

定性表示为 $\Delta f = 0.1 - 0.1\sin(\pi x)$ ，外部扰动表示为 $d(t) = 0.1\cos(t)$ 。数值仿真如图 2-6 所示，仿真效果较理想。

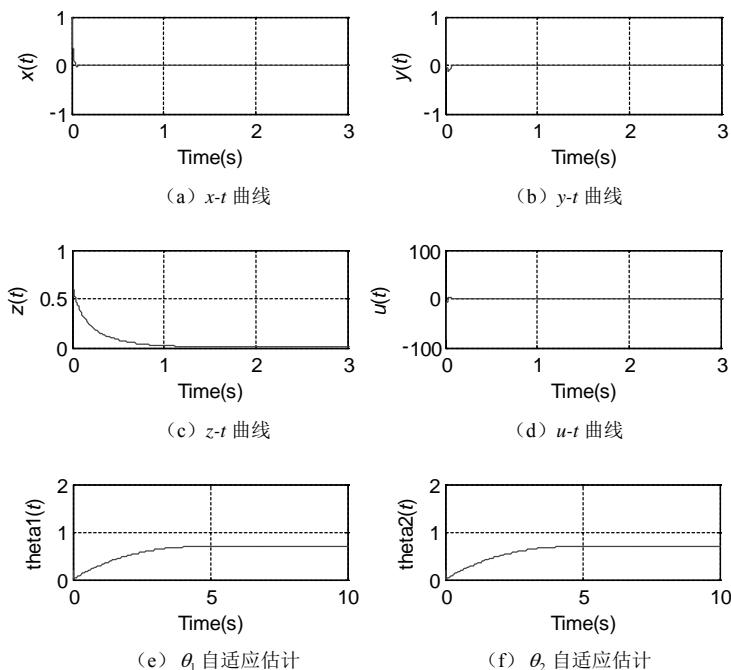


图 2-6 分数阶 Chen 系统的滑模自适应控制效果

仿真程序包括主程序 AdaptiveSlidingChens.m、memo.m、memos.m，以及调用程序 demo_AdaptiveSlidingChen.m。其中，AdaptiveSlidingChens.m 的源程序代码如下：

```
function [T, Y]=AdaptiveSlidingChenS(parameters, orders, TSim, Y0)
h=0.0005;
% number of calculated mesh points:
n=round(TSim/h);
%orders of derivatives, respectively:
q1=orders(1); q2=orders(2); q3=orders(3);
% constants of Chen's system:
a=parameters(1);
b=parameters(2);
c=parameters(3);
k1=parameters(4);
```



```

k2=parameters(5);
mul=parameters(6);
mu2=parameters(7);
% binomial coefficients calculation:
cp1=1; cp2=1; cp3=1;
for j=1:n
    c1(j)=(1-(1+q1)/j)*cp1;
    c2(j)=(1-(1+q2)/j)*cp2;
    c3(j)=(1-(1+q3)/j)*cp3;
    cp1=c1(j); cp2=c2(j); cp3=c3(j);
end
% initial conditions setting:
s(1)=Y0(1);x(1)=Y0(2); y(1)=Y0(3); z(1)=Y0(4); theta1(1)=Y0(5);
theta2(1)=Y0(6);u(1)=Y0(7);
% calculation of phase portraits /numerical solution/:
for i=2:n
    s(i)=1/gamma(1-q1)*h^(1-q1)*memos(x,i-1)+a*h*memos(x,i)+c*h*memos
(y,i)+h*memoxz(x,z,i);
    x(i)=(a*(y(i-1)-x(i-1)))*h^q1 - memo(x, c1, i);
    y(i)=(0.1-0.1*sin(pi*x(i-1))+0.1*cos(i)-a*x(i)-x(i)*z(i-1)
-c*y(i-1)-k1*sign(s(i))-k2*s(i))*h^q2 - memo(y, c2, i);
    z(i)=(x(i)*y(i)-b*z(i-1))*h^q3 - memo(z, c3, i);
    theta1(i)=mul*h*memos(abs(s),i);
    theta2(i)=mu2*h*memos(abs(s),i);
    u(i)=-c*x(i)-2*c*y(i)-k1*sign(s(i))-k2*s(i);
end
for j=1:n
    Y(j,1)=s(j);
    Y(j,2)=x(j);
    Y(j,3)=y(j);
    Y(j,4)=z(j);
    Y(j,5)=theta1(j);
    Y(j,6)=theta2(j);
    Y(j,7)=u(j);
end
T=h:h:TSim;

```

调用程序 demo_AdaptiveSlidingChen.m 的源程序代码如下：

```
[t, y]=AdaptiveSlidingChenS([35 3 28 0.175 0.1 .2 .2 ], [0.9 0.9 0.9],
10, [1 1 1 1 .2 .2 -84.1]);
figure(6);
subplot(3,2,1);
plot(t,y(:,2));
axis([0 3 -1 1]);
xlabel('Time(sec)');
ylabel('x(t)')
title('a')
grid on;
subplot(3,2,2);
plot(t,y(:,3));
axis([0 3 -1 1]);
xlabel('Time(sec)');
ylabel('y(t)')
title('b')
grid on;
subplot(3,2,3);
plot(t,y(:,4));
axis([0 3 0 1]);
xlabel('Time(sec)');
ylabel('z(t)')
title('c')
grid on;
subplot(3,2,4);
plot(t,y(:,7));
axis([0 3 -100 100]);
xlabel('Time(sec)');
ylabel('u(t)')
title('d')
grid on;
subplot(3,2,5);
plot(t,y(:,5));
axis([0 10 0 2]);
xlabel('Time(sec)');
ylabel('theta1(t)')
title('e')
grid on;subplot(3,2,2);
```

```

subplot(3,2,6);
plot(t,y(:,6));
axis([0 10 0 2]);
xlabel('Time(sec)');
ylabel('theta2(t)');
title('f')
grid on;

```

2.4.3 分数阶 Lorenz-Stenflo 系统的滑模控制律设计与仿真

分数阶 Lorenz-Stenflo 超混沌系统由以下分数阶微分方程描述：

$$\begin{cases} {}^C_0 D_t^{q_1} x_1 = \alpha(x_2 - x_1) + \gamma x_4 \\ {}^C_0 D_t^{q_2} x_2 = x_1(r - x_3) - x_2 \\ {}^C_0 D_t^{q_3} x_3 = x_1 x_2 - \beta x_3 \\ {}^C_0 D_t^{q_4} x_4 = -x_1 - \alpha x_4 \end{cases} \quad (2-24)$$

式中, x_1, x_2, x_3, x_4 为状态变量, α, β, γ, r 为已知参数, $q_1, q_2, q_3, q_4 \in (0, 1]$ 为系统的阶次。当 $\alpha=1$, $\beta=0.7$, $\gamma=1.5$, $r=26$, $q_1=q_2=q_3=q_4=0.96$ 时, 系统呈现如图 2-7 和图 2-8 所示的混沌现象。

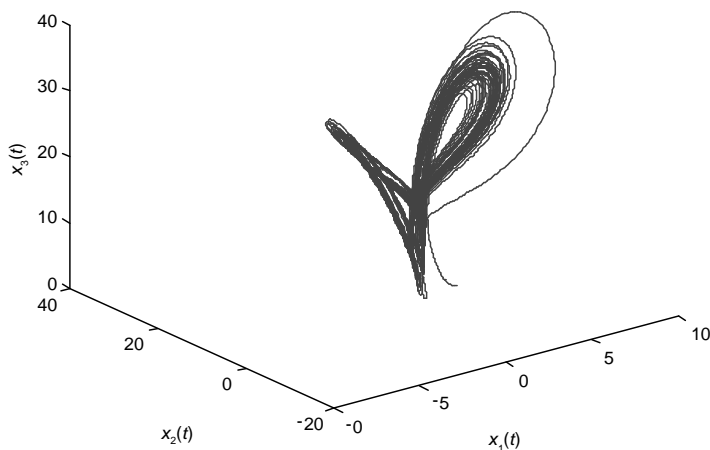


图 2-7 分数阶 Lorenz-Stenflo 超混沌系统投影于 $x_1 - x_2 - x_3$ 时的奇异吸引子, 仿真时间为 200s

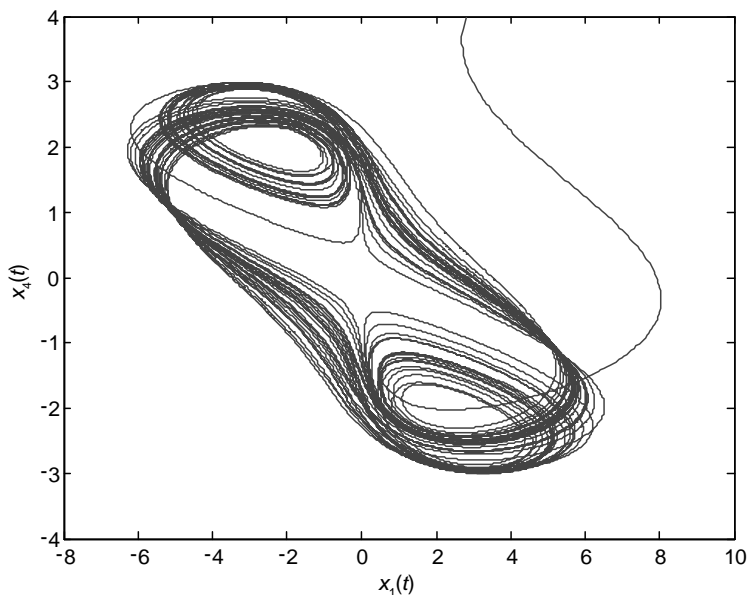


图 2-8 分数阶 Lorenz-Stenflo 超混沌系统投影于 $x_1 - x_4$ 时的奇异吸引子，
仿真时间为 200s

首先，设计分数阶滑模面 S 如下：

$$s_1(t) = D^{q_1-1}x_1(t) + D^{-1}\phi(t) \quad (2-25)$$

式中， $\phi(t)$ 为连续函数，留待稍后确定。

求 $s_1(t)$ 的导数，得

$$\dot{s}_1(t) = D^{q_1}x_1(t) + \phi(t) \quad (2-26)$$

从而得到滑模动力学方程

$$\begin{cases} {}^C_0D^{q_1}x_1(t) = -\phi(t) \\ {}^C_0D^{q_2}x_2 = x_1(r - x_3) - x_2 \\ {}^C_0D^{q_3}x_3 = x_1x_2 - \beta x_3 \\ {}^C_0D^{q_4}x_4 = -x_1 - \alpha x_4 \end{cases} \quad (2-27)$$

根据频率分布模型，滑模动力学方程 (2-27) 等价于如下扩散方程：

$$\begin{cases} \frac{\partial z_1(\omega, t)}{\partial t} = -\omega z_1(\omega, t) - \varphi(t) \\ \frac{\partial z_2(\omega, t)}{\partial t} = -\omega z_2(\omega, t) + x_1(r - x_3) - x_2 \\ \frac{\partial z_3(\omega, t)}{\partial t} = -\omega z_3(\omega, t) + x_1 x_2 - \beta x_3 \\ \frac{\partial z_4(\omega, t)}{\partial t} = -\omega z_4(\omega, t) - x_1 - \alpha x_4 \end{cases} \quad (2-28)$$

其中

$$x_i(t) = \int_0^\infty \mu_i(\omega) z_i(\omega, t) d\omega \quad (2-29)$$

且

$$\mu_i(\omega) = \frac{\sin(q_i \pi)}{\pi} \omega^{-q_i}, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

下面将确定函数 $\varphi(t)$ ，以保证所设计的分数阶滑模面的动力学 (2-27) 的稳定性。为此，选取 Lyapunov 函数

$$V_1(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \int_0^\infty \mu_i(\omega) z_i^2(\omega, t) d\omega$$

对 $V_1(t)$ 求导数，得

$$\dot{V}_1(t) = \sum_{i=1}^4 \int_0^\infty \mu_i(\omega) z_i(\omega, t) \frac{\partial z_i(\omega, t)}{\partial t} d\omega \quad (2-20)$$

将式 (2-28) 的第一个方程代入式 (2-20)，得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) &= \int_0^\infty \mu_1 z_1 \varphi(t) d\omega + \int_0^\infty \mu_2 z_2 [-\omega z_2 + x_1(r - x_3) - x_2] d\omega + \\ &\quad \int_0^\infty \mu_3 z_3 (-\omega z_3 + x_1 x_2 - \beta x_3) d\omega + \int_0^\infty \mu_4 z_4 (-\omega z_4 - x_1 - \alpha x_4) d\omega \\ &= \varphi(t) \int_0^\infty \mu_1 z_1 d\omega + [x_1(r - x_3) - x_2] \int_0^\infty \mu_2 z_2 d\omega + \\ &\quad (x_1 x_2 - \beta x_3) \int_0^\infty \mu_3 z_3 d\omega + (-x_1 - \alpha x_4) \int_0^\infty \mu_4 z_4 d\omega - \\ &\quad \sum_{i=1}^4 \int_0^\infty \mu_i \omega z_i^2 d\omega \end{aligned} \quad (2-31)$$

将式 (2-29) 代入式 (2-31) 中, 得

$$\begin{aligned}\dot{V}_1(t) &= \varphi x_1 + [x_1(r - x_3) - x_2]x_2 + (x_1x_2 - \beta x_3)x_3 + \\ &\quad (-x_1 - \alpha x_4)x_4 - \sum_{i=1}^4 \int_0^\infty \mu_i \omega z_i^2 d\omega \\ &= x_1[\varphi + rx_2 - x_4] - x_2^2 - \beta x_3^2 - \alpha x_4^2 - \sum_{i=1}^4 \int_0^\infty \mu_i \omega z_i^2 d\omega\end{aligned}\quad (2-32)$$

由此选取

$$\varphi(t) = -x_1 - rx_2 + x_4$$

则式 (2-32) 变为

$$\dot{V}_1(t) = -x_1^2 - x_2^2 - \beta x_3^2 - \alpha x_4^2 - \sum_{i=1}^4 \int_0^\infty \mu_i \omega z_i^2 d\omega$$

当 α, β 为正数时, $\dot{V}_1(t)$ 负定, 从而滑模面的动力学是渐近稳定的; 当 α, β 为非负数时, $\dot{V}_1(t)$ 半负定, 从而滑模面的动力学是稳定的。

下面设计控制律。选取 Lyapunov 函数

$$V_2(t) = \frac{1}{2}s_1^2$$

求导, 得

$$\begin{aligned}\dot{V}_2(t) &= s_1 \dot{s}_1 \\ &= s(D^q x_1 + \varphi) \\ &= s[(1 - \alpha)x_1 + (\alpha + r)x_2 + (\gamma - 1)x_4 + u]\end{aligned}\quad (2-33)$$

设计控制律为

$$u(t) = (\alpha - 1)x_1 - (\alpha + r)x_2 - (\gamma - 1)x_4 - k_1 \operatorname{sgn}(s_1) - k_2 s_1 \quad (2-34)$$

式中, k_1, k_2 为正常数。

将式 (2-34) 代入式 (2-33), 得

$$\begin{aligned}\dot{V}_2(t) &= s_1[-k_1 \operatorname{sgn}(s_1) - k_2] \\ &= -k_1 \sqrt{V_2} - k_2 V_2\end{aligned}$$

因此, V_2 在有限时间内趋于零, 从而滑模面的动力学行为也在有限时间内趋于零^[97]。这就说明了在式 (2-34) 的作用下, 分数阶 Lorenz-Stenflo 超混沌系统的动力学全局是渐近稳定的。

下面考虑系统存在建模不确定性 $\Delta f(x, y, z)$ 及外部干扰 $d(t)$ 情形下的滑模控制律设计。此时, 系统的微分方程为

$$\begin{cases} {}^C_0 D_t^{\alpha_1} x_1 = \alpha(x_2 - x_1) + \gamma x_4 + \Delta f(x, y, z) + d(t) + u \\ {}^C_0 D_t^{\alpha_2} x_2 = x_1(r - x_3) - x_2 \\ {}^C_0 D_t^{\alpha_3} x_3 = x_1 x_2 - \beta x_3 \\ {}^C_0 D_t^{\alpha_4} x_4 = -x_1 - \alpha x_4 \end{cases} \quad (2-35)$$

假设 $\Delta f(x, y, z)$ 和 $d(t)$ 有界, 即 $|\Delta f(x, y, z)| < \theta_1$, $|d(t)| < \theta_2$, 其中 θ_1 及 θ_2 是未知正常数。下面利用自适应技术来估计它们。记 $\hat{\theta}_1$ 为 θ_1 的估计, $\hat{\theta}_2$ 为 θ_2 的估计。

选取 Lyapunov 函数

$$V_3 = \frac{1}{2} \left[s_1^2 + \frac{1}{\mu_1} (\hat{\theta}_1 - \theta_1)^2 + \frac{1}{\mu_2} (\hat{\theta}_2 - \theta_2)^2 \right]$$

求导, 得

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(t) &= s_1 \dot{s}_1 + \frac{1}{\mu_1} (\hat{\theta}_1 - \theta_1) \dot{\hat{\theta}}_1 + \frac{1}{\mu_2} (\hat{\theta}_2 - \theta_2) \dot{\hat{\theta}}_2 \\ &= s_1 (D^q x + \phi) + \frac{1}{\mu_1} (\hat{\theta}_1 - \theta_1) \dot{\hat{\theta}}_1 + \frac{1}{\mu_2} (\hat{\theta}_2 - \theta_2) \dot{\hat{\theta}}_2 \\ &= s_1 \left[(1 - \alpha)x_1 + (\alpha + r)x_2 + (\gamma - 1)x_4 + \Delta f + d + u \right] + \\ &\quad \frac{1}{\mu_1} (\hat{\theta}_1 - \theta_1) \dot{\hat{\theta}}_1 + \frac{1}{\mu_2} (\hat{\theta}_2 - \theta_2) \dot{\hat{\theta}}_2 \end{aligned} \quad (2-36)$$

设计如下滑模控制律及自适应律:

$$u(t) = (\alpha - 1)x_1 - (\alpha + r)x_2 - (\gamma - 1)x_4 - (\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 + k) \operatorname{sgn}(s_1) \quad (2-37)$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{\theta}}_1 = \mu_1 |s_1| \\ \dot{\hat{\theta}}_2 = \mu_2 |s_1| \end{cases} \quad (2-38)$$

将式 (2-37) 及式 (2-38) 代入式 (2-36), 得

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_3(t) &= s_1 \left[\Delta f + d - (\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 + k) \operatorname{sgn}(s_1) \right] + (\hat{\theta}_1 - \theta_1) |s_1| + (\hat{\theta}_2 - \theta_2) |s_1| \\
 &= (\Delta f + d) s_1 - (\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 + k_1) |s_1| + (\hat{\theta}_1 - \theta_1) |s_1| + (\hat{\theta}_2 - \theta_2) |s_1| \\
 &\quad (|\Delta f| + |d|) |s_1| - (\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 + k_1) |s_1| + (\hat{\theta}_1 - \theta_1) |s_1| + (\hat{\theta}_2 - \theta_2) |s_1| \quad (2-39) \\
 &< (\theta_1 + \theta_2) |s_1| - (\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 + k_1) |s_1| + (\hat{\theta}_1 - \theta_1) |s_1| + (\hat{\theta}_2 - \theta_2) |s_1| \\
 &= -k |s_1| < 0
 \end{aligned}$$

由此, 证明了分数阶系统存在不确定性和外部干扰情形时, 在分数阶滑模控制律 (2-37) 及自适应律 (2-38) 的作用下, 分数阶 Lorenz-Stenflo 超混沌系统的动力学是稳定的。

2.5 本章小结

本章提出了一个统一的表达式概括一类新型的分数阶混沌系统, 设计了分数阶滑模面, 基于无穷维状态方法及 Lyapunov 稳定性理论证明了该滑模面的动力学稳定性, 设计了分数阶滑模控制律并将该方法应用于分数阶 Lorenz 系统及分数阶 Chen 系统两类具体的分数阶混沌系统, 并通过数值仿真验证了该方法的有效性。最后, 将该方法用于分数阶 Lorenz-Stenflo 超混沌系统的滑模控制律设计。

第 3 章

一类分数阶混沌系统滑模控制设计：Mittag-Leffler 稳定性方法

本章的主要目标是基于 Mittag-Leffler 稳定性方法针对同元阶次的新型分数阶混沌系统 (2-1) 设计滑模控制律，即分数阶导数 $q_1 = q_2 = q_3 = q$ 的情形。

$$\begin{cases} D^q x = f(x, y, z) - \alpha x \\ D^q y = xg(x, y, z) - \beta y \\ D^q z = xh(x, y, z) - \gamma z \end{cases} \quad (3-1)$$

为此，首先给出与 2.3 节不同的分数阶滑模面，然后针对标称系统 (3-1) 设计滑模控制律，在此基础上，针对不确定混沌系统设计自适应滑模控制律。

3.1 分数阶滑模控制设计

3.1.1 分数阶滑模面设计

设计分数阶积分滑模面为

$$s(t) = x(t) + {}_0 I_t^q \varphi(t) \quad (3-2)$$

式中, $\varphi(t) = yg(x, y, z) + zh(x, y, z) + \alpha x$ 。

对 $s(t)$ 求 q 阶次的分数阶导数, 得

$$D^q s(t) = D^q x(t) + \varphi(t) \quad (3-3)$$

下面证明滑模面的动力学稳定性, 即当分数阶混沌系统 (2-1) 的轨线进入滑模面时, 3 个状态变量 x, y, z 就渐近收敛到零。

令 $D^q s(t) = 0$, 则分数阶滑模动力学方程为

$$\begin{cases} D^q x = -yg(x, y, z) - zh(x, y, z) - \alpha x \\ D^q y = xg(x, y, z) - \beta y \\ D^q z = xh(x, y, z) - \gamma z \end{cases} \quad (3-4)$$

针对式 (3-3) 设计 Luapunov 函数

$$V_1(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}z^2 \quad (3-5)$$

求 $V_1(x, y, z)$ 关于时间的 q 阶分数阶导数, 由引理 1.3, 得

$$D^q V_1 = xD^q x + yD^q y + zD^q z \quad (3-6)$$

将分数阶混沌系统 (3-1) 中的 3 个状态方程代入式 (3-6), 得

$$\begin{aligned} D^q V_1 &= x(-yg - zh - \alpha x) + y(xg - \beta y) + z(xh - \gamma z) \\ &= -(\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2) \end{aligned} \quad (3-7)$$

记 $\eta = \min\{\alpha, \beta, \gamma\}$, 则由式 (3-7) 进一步得到

$$D^q V_1 \leq -\eta V_1 \quad (3-8)$$

式 (3-8) 满足 Mittag-Leffler 稳定性定理, 由此得到分数阶混沌系统 (3-1)

的 3 个状态变量 x, y, z 渐近趋于零。

因此，得到下面的结论：

定理 3.1 对于分数阶新型混沌系统 (3-1)，设计分数阶滑模面 (3-2)，则滑模动力学 (3-4) 是全局渐近稳定性的。

3.1.2 分数阶滑模控制律设计

为了设计标称系统 (3-1) 的滑模控制律，定义 Lyapunov 控制函数为

$$V_2(x, y, z) = \frac{1}{2}s^2$$

求 $V_2(x, y, z)$ 关于时间的 q 阶分数阶导数，并代入系统 (3-1) 的第一个状态方程，得

$$\begin{aligned} D^q V_2 &= s D^q s \\ &= s(D^q x + \varphi) \\ &= s[f(x, y, z) - \alpha x + u(t) + yg(x, y, z) + zh(x, y, z) + \alpha x] \end{aligned} \quad (3-9)$$

设计控制律

$$u(t) = -f(x, y, z) - yg(x, y, z) - zh(x, y, z) - k_1 \text{sign}(s) - k_2 s \quad (3-10)$$

将控制律 (3-10) 代入式 (3-9) 中的最后一个等式，得

$$\begin{aligned} D^q V_2 &= s[-k_1 \text{sign}(s) - k_2 s] \\ &= -k_1 |s| - k_2 s^2 \\ &= -k_2 V_2 \end{aligned} \quad (3-11)$$

根据 Mittag-Leffler 稳定性定理，得到

$$s \rightarrow 0 \text{ 且 } x, y, z \rightarrow 0$$

通过上述讨论，得到以下结论：

定理 3.2 在分数阶滑模控制律 (3-10) 的作用下，分数阶新型混沌系统 (3-1) 的 3 个状态变量 $x(t), y(t), z(t)$ 全局渐近趋于零。

3.1.3 分数阶滑模自适应控制律设计

我们进一步考虑分数阶混沌系统 (3-1) 存在不确定性和外部扰动情形的滑模控制设计问题。与 3.2.2 节不同的是, 所有的状态方程中都存在不确定性和外部扰动因素, 数学模型为

$$\begin{cases} D^q x = f(x, y, z) - \alpha x + \Delta f_1(x, y, z) + d_1(t) \\ D^q y = xg(x, y, z) - \beta y + \Delta f_2(x, y, z) + d_2(t) \\ D^q z = xh(x, y, z) - \gamma z + \Delta f_3(x, y, z) + d_3(t) \end{cases} \quad (3-12)$$

假设系统的不确定性和外部扰动都是有界的, 即

$$\begin{aligned} |\Delta f_1(x, y, z)| < \theta_1, \quad |d_1(t)| < \theta_2, \quad |\Delta f_2(x, y, z)| < F_2, \\ |d_2(t)| < D_2, \quad |\Delta f_3(x, y, z)| < F_3, \quad |d_3(t)| < D_3 \end{aligned}$$

式中, θ_1 、 θ_2 、 F_2 、 D_2 、 F_3 、 D_3 是待定的非负常数。

设计与式 (3-2) 相同的分数阶滑模面, 则此时滑模动力学方程为

$$\begin{cases} D^q x = -yg(x, y, z) - zh(x, y, z) - \alpha x \\ D^q y = xg(x, y, z) - \beta y + \Delta f_2 + d_2 \\ D^q z = xh(x, y, z) - \gamma z + \Delta f_3 + d_3 \end{cases} \quad (3-13)$$

为了分析滑模动力学的稳定性, 引入如下 Lyapunov 函数:

$$V_3(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}z^2$$

求 $V_3(x, y, z)$ 关于时间的 q 阶分数阶导数, 由 Caputo 导数的性质, 即引理 1.5, 得

$$D^q V_3 = xD^q x + yD^q y + zD^q z \quad (3-14)$$

将式 (3-12) 代入式 (3-14) 得

$$\begin{aligned} D^q V_3 &= x(-yg - zh - \alpha x) + y(xg - \beta y + \Delta f_2 + d_2) + z(xh - \gamma z + \Delta f_3 + d_3) \\ &= -(\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2) + y(\Delta_2 + D_2) + z(\Delta_3 + D_3) \end{aligned}$$

记 $\rho = y(\Delta_2 + D_2) + z(\Delta_3 + D_3)$, 由于混沌系统的状态变量都是有界的, 因此

ρ 也是有界的。

最后, 得到了如下不等式:

$$D^q V_3 \leq -\eta V_3 + \rho \quad (3-15)$$

根据文献[98]定理 2 的证明过程, 得到滑模动力学是全局稳定的。

因此, 得到如下结论:

分数阶混沌系统 (3-1) 存在不确定性和外部扰动时, 分数阶滑模面对应的动力学方程 (3-13) 依然是全局稳定的。

下面针对扰动系统设计滑模控制律, 首先引入 Lyapunov 函数:

$$V_4(x, y, z, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \frac{1}{2} \left[s^2 + \frac{1}{\mu_1} (\hat{\theta}_1 - \theta_1)^2 + \frac{1}{\mu_2} (\hat{\theta}_2 - \theta_2)^2 \right] \quad (3-16)$$

求 $V_4(x, y, z)$ 关于时间的 q 阶分数阶导数, 由 Caputo 导数的性质得

$$D^q V_4 \leq s D^q s + \frac{1}{\mu_1} (\hat{\theta}_1 - \theta_1) D^q \hat{\theta}_1 + \frac{1}{\mu_2} (\hat{\theta}_2 - \theta_2) D^q \hat{\theta}_2 \quad (3-17)$$

将式 (3-3) 代入不等式 (3-17) 右边的第一项, 得

$$D^q V_4 \leq s (D^q x + \varphi) + \frac{1}{\mu_1} (\hat{\theta}_1 - \theta_1) D^q \hat{\theta}_1 + \frac{1}{\mu_2} (\hat{\theta}_2 - \theta_2) D^q \hat{\theta}_2 \quad (3-18)$$

将扰动系统 (3-12) 的第一个状态方程代入式 (3-18), 得

$$D^q V_4 \leq s \left[f(x, y, z) - \alpha x + \Delta f_1 + d_1 + u(t) + yg(x, y, z) + zh(x, y, z) + \alpha x \right] + \frac{1}{\mu_1} (\hat{\theta}_1 - \theta_1) D^q \hat{\theta}_1 + \frac{1}{\mu_2} (\hat{\theta}_2 - \theta_2) D^q \hat{\theta}_2 \quad (3-19)$$

选择控制律

$$u(t) = -f(x, y, z) - yg(x, y, z) - zh(x, y, z) - (\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 + k_1) \text{sign}(s) - k_2 s \quad (3-20)$$

以及分数阶自适应律

$$\begin{cases} D^q \hat{\theta}_1 = \mu_1 |s| \\ D^q \hat{\theta}_2 = \mu_2 |s| \end{cases} \quad (3-21)$$

将式 (3-20) 与式 (3-21) 代入式 (3-19), 得

$$\begin{aligned} D^q V_4 &= s \left[\Delta f_1 + d_1 - (\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 + k_1) \text{sign}(s) - k_2 s \right] + (\hat{\theta}_1 - \theta_1) |s| + (\hat{\theta}_2 - \theta_2) |s| \\ &= (\Delta f_1 + d_1) s - (\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 + k_1) |s| + (\hat{\theta}_1 - \theta_1) |s| + (\hat{\theta}_2 - \theta_2) |s| - k_2 s^2 \\ &\quad (\theta_1 + \theta_2) |s| - (\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 + k_1) |s| + (\hat{\theta}_1 - \theta_1) |s| + (\hat{\theta}_2 - \theta_2) |s| - k_2 s^2 \\ &= -k_1 |s| - k_2 s^2 \end{aligned}$$

显然, 当且仅当 $s=0$ 时, $D^q V_4(x, y, z, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = 0$ 且 $D^q V_4(x, y, z, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = 0$, 从而有 $x, y, z \rightarrow 0$, $\hat{\theta}_1 \rightarrow \theta_1, \hat{\theta}_2 \rightarrow \theta_2$ 。

根据以上推导, 得到如下结论:

定理 3.3 对于分数阶混沌系统的扰动系统 (3-12), 在滑模控制律 (3-20) 与分数阶自适应律 (3-21) 的作用下其运动状态 x, y, z 渐近趋于零。

3.2 数值仿真

3.2.1 分数阶 Lorenz 系统滑模控制律设计与数值仿真

本节将提出的基于 Mittag-Leffler 稳定性理论的分数阶滑模控制设计方法应用于分数阶 Lorenz 系统, 并对其进行数值仿真, 以验证该方法的可行性与有效性。

根据式 (3-2), 分数阶滑模面设计为

$$s(t) = x(t) + {}_0 I_t^q \varphi(t) \quad (3-22)$$

其中, $\varphi(t) = ax(t) + ry(t)$ 。

根据式 (3-10), 控制律设计为

$$u(t) = -(a+r)y(t) - k_1 \text{sign}(s) - k_2 s \quad (3-23)$$

数值仿真中，分数阶导数的阶次取 $q=0.993$ ，控制律中的控制增益取 $k_1=0.02$ ， $k_2=0.02$ 。

分数阶 Lorenz 标称系统的控制效果如图 3-1~图 3-4 所示。其中，图 3-1~图 3-3 所示为 3 个状态变量的响应曲线，图 3-4 所示为控制输入的变化曲线，图 3-5 所示为分数阶滑模面的变化曲线。

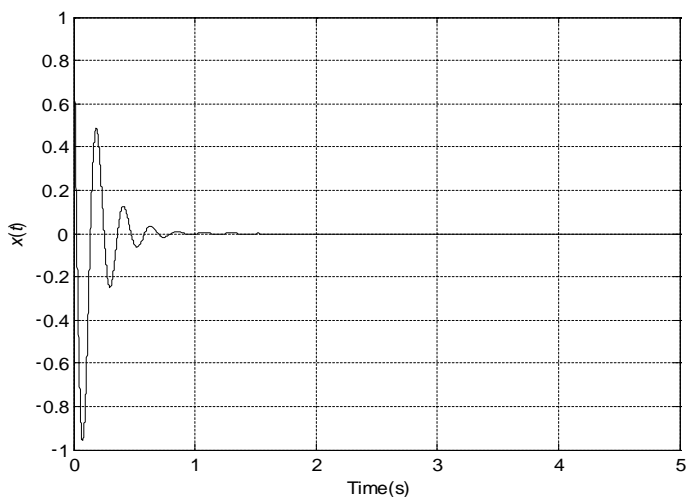


图 3-1 分数阶 Lorenz 混沌系统的滑模控制效果： $x-t$ 曲线

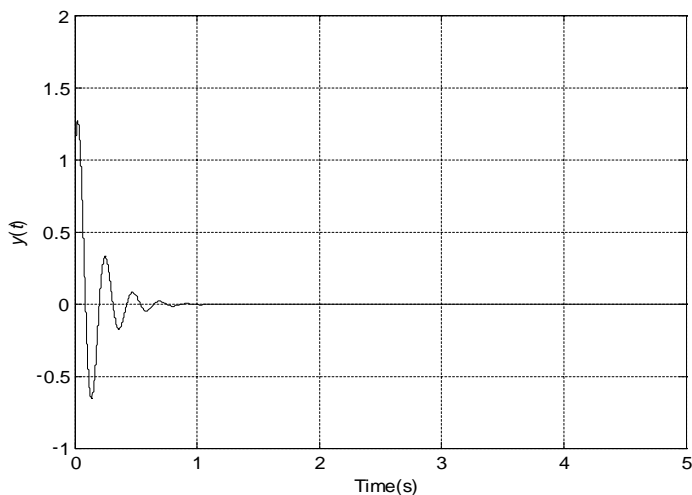
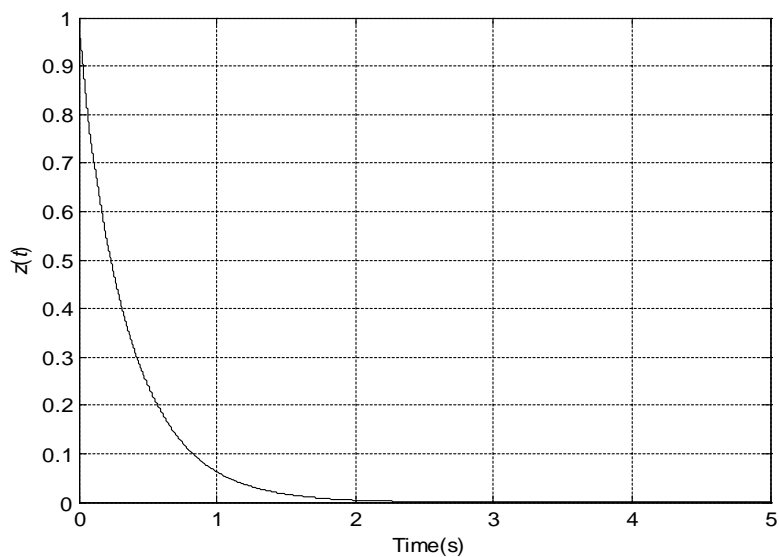
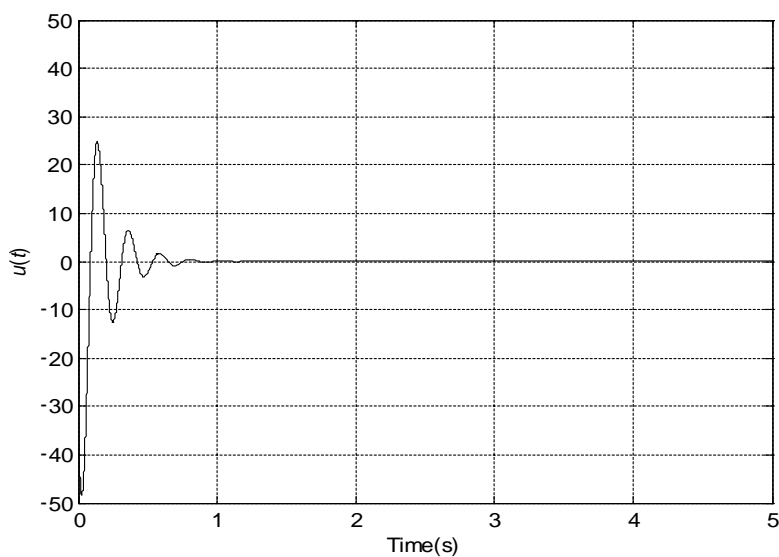


图 3-2 分数阶 Lorenz 混沌系统的滑模控制效果： $y-t$ 曲线

图 3-3 分数阶 Lorenz 混沌系统的滑模控制效果： $z-t$ 曲线图 3-4 分数阶 Lorenz 混沌系统的滑模控制效果： $u-t$ 曲线

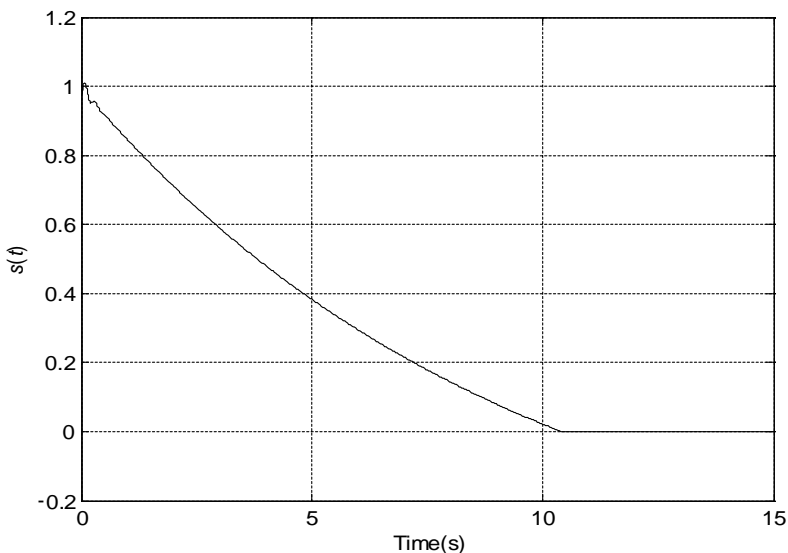


图 3-5 分数阶滑模面 [式 (3-22)] 的运动曲线

仿真程序:

主程序 SlidingLorenzsC.m, 如下:

```
function [T, Y]=SlidingLorenzsC(parameters, orders, TSim, Y0)
h=0.0005;
% number of calculated mesh points:
n=round(TSim/h);
%orders of derivatives, respectively:
q1=orders(1); q2=orders(2); q3=orders(3);
% constants of Lorenz's system:
sigma=parameters(1); rho=parameters(2); beta=parameters(3);
k1=parameters(4);k2=parameters(5);
% binomial coefficients calculation:
cp1=1; cp2=1; cp3=1;
for j=1:n
    c1(j)=(1-(1+q1)/j)*cp1;
    c2(j)=(1-(1+q2)/j)*cp2;
    c3(j)=(1-(1+q3)/j)*cp3;
    cp1=c1(j); cp2=c2(j); cp3=c3(j);
end
% initial conditions setting:
```

```

s(1)=Y0(1);x(1)=Y0(2); y(1)=Y0(3); z(1)=Y0(4);u(1)=Y0(5);

% calculation of phase portraits /numerical solution/
for i=2:n
    s(i)=x(i-1)+1/gamma(q1)*h^(q1)*memos(10*x+28*y,i-1);
    x(i)=(-sigma*x(i-1)-rho*y(i-1)-k1*sign(s(i))-k2*s(i))*h^q1 -
memo(x, c1, i);
    y(i)=(x(i)*(rho-z(i-1))-y(i-1))*h^q2 - memo(y, c2, i);
    z(i)=(x(i)*y(i)-beta*z(i-1))*h^q3 - memo(z, c3, i);
    u(i)=-(sigma+rho)*y(i)-k1*sign(s(i))-k2*s(i);
end
for j=1:n
    Y(j,1)=s(j);
    Y(j,2)=x(j);
    Y(j,3)=y(j);
    Y(j,4)=z(j);
    Y(j,5)=u(j);
end
T=h:h:TSim;

```

图 3-1 的程序如下:

```

[t, y]=SlidingLorenzSC([10 28 8/3 0.05 0.1 ],[0.993 0.993 0.993],5,[1
1 1 1 -38]);
plot(t,y(:,2),'k');
axis([0 5 -1 1]);
xlabel('Time(sec)');
ylabel('x(t)');
grid on;

```

图 3-2 的程序如下:

```

[t, y]=SlidingLorenzSC([10 28 8/3 0.05 0.1 ],[0.993 0.993 0.993],5,[1
1 1 1 -38]);
plot(t,y(:,3),'k');
axis([0 5 -1 2]);
xlabel('Time(sec)');
ylabel('y(t)');
grid on;

```

图 3-3 的程序如下:

```
[t, y]=SlidingLorenzSC([10 28 8/3 0.05 0.1 ],[0.993 0.993 0.993],5,[1
1 1 1 -38]);
plot(t,y(:,4),'k');
axis([0 5 0 1]);
xlabel('Time(sec)');
ylabel('z(t)')
grid on;
```

图 3-4 的程序如下:

```
[t, y]=SlidingLorenzSC([10 28 8/3 0.05 0.1 ],[0.993 0.993 0.993],5,[1
1 1 1 -38]);
plot(t,y(:,5),'k');
axis([0 5 -50 50]);
xlabel('Time(sec)');
ylabel('u(t)')
grid on;
```

图 3-5 的程序如下:

```
[t, y]=SlidingLorenzSC([10 28 8/3 0.05 0.1 ],[0.993 0.993
0.993],15,[1 1 1 1 -38]); plot(t,y(:,1),'k');
xlabel('Time(sec)');
ylabel('s(t)')
grid on;
```

3.2.2 分数阶 Lorenz 系统的滑模自适应控制律设计与仿真

进一步考虑分数阶 Lorenz 系统存在不确定性和外部扰动时的控制设计问题。将控制律作用于扰动系统的第一个状态方程, 数学模型为

$$\begin{cases} D^q x = -a(x-y) + \Delta f_1 + d_1 + u(t) \\ D^q y = rx - y - xz + \Delta f_2 + d_2 \\ D^q z = -bz + xy + \Delta f_3 + d_3 \end{cases}$$

根据式 (3-20) 和式 (3-21), 分别设计滑模控制律和分数阶自适应律

$$u(t) = -(a+r)y - (\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 + k_1) \text{sign}(s) - k_2 s \quad (3-24)$$

$$\begin{cases} D^q \hat{\theta}_1 = \mu_1 |s| \\ D^q \hat{\theta}_2 = \mu_2 |s| \end{cases} \quad (3-25)$$

数值仿真中，扰动系统的不确定性及外部扰动为 $\Delta f_1(x, y, z) = 0.1 + 0.1 \sin(\pi x)$ ， $d_1(t) = 0.1 \cos t$ ， $\Delta f_2(x, y, z) = 0.1 - 0.2 \sin(\pi y)$ ， $d_2(t) = 0.2 \sin(2t)$ ， $\Delta f_3(x, y, z) = 0.1 x \cos(\pi z)$ ， $d_3(t) = 0.1 \cos(\pi t)$ 。分数阶导数的阶次取为 $q = 0.91$ ，控制律中的控制增益取为 $k_1 = 0.02$ ， $k_2 = 0.02$ ，自适应律参数取 $\mu_1 = 0.03$ ， $\mu_2 = 0.02$ ，自适应律的初值条件取为 $\theta_1(0) = 0.2$ ， $\theta_2(0) = 0.2$ 。

仿真效果如图 3-6~图 3-12 所示。

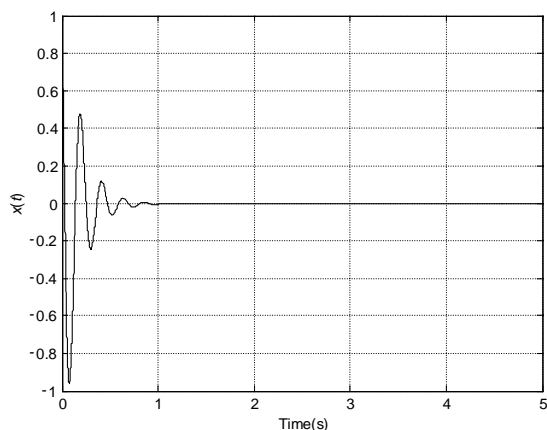


图 3-6 分数阶 Lorenz 系统的滑模自适应控制效果：x-t 曲线

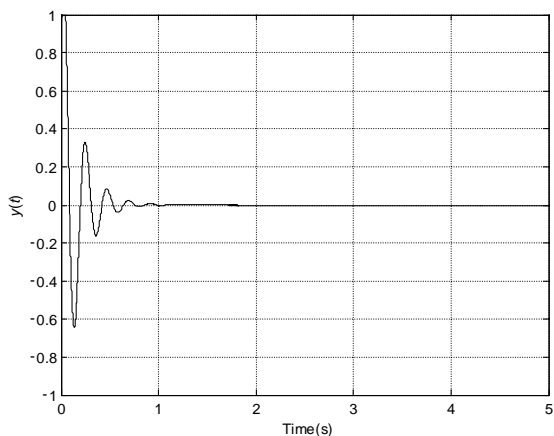
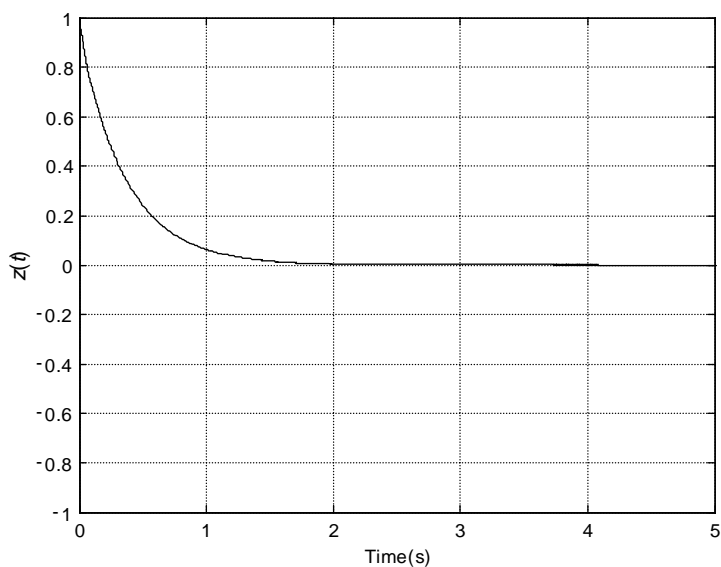
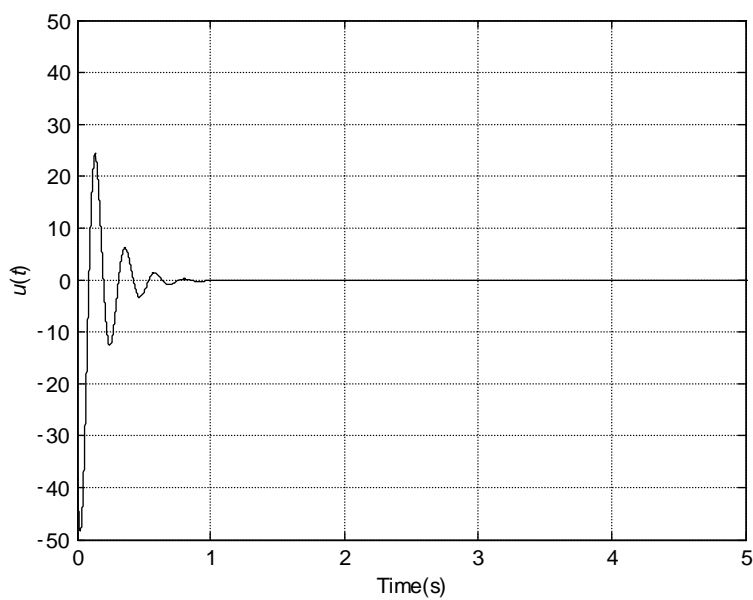


图 3-7 分数阶 Lorenz 系统的滑模自适应控制效果：y-t 曲线

图 3-8 分数阶 Lorenz 系统的滑模自适应控制效果: z - t 曲线图 3-9 分数阶 Lorenz 系统的滑模自适应控制效果: u - t 曲线

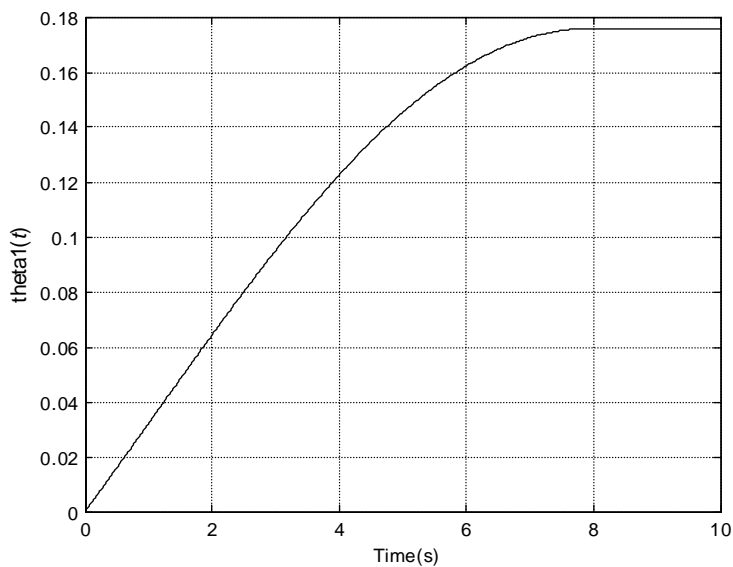


图 3-10 分数阶 Lorenz 系统的滑模自适应控制效果： θ_1 自适应估计

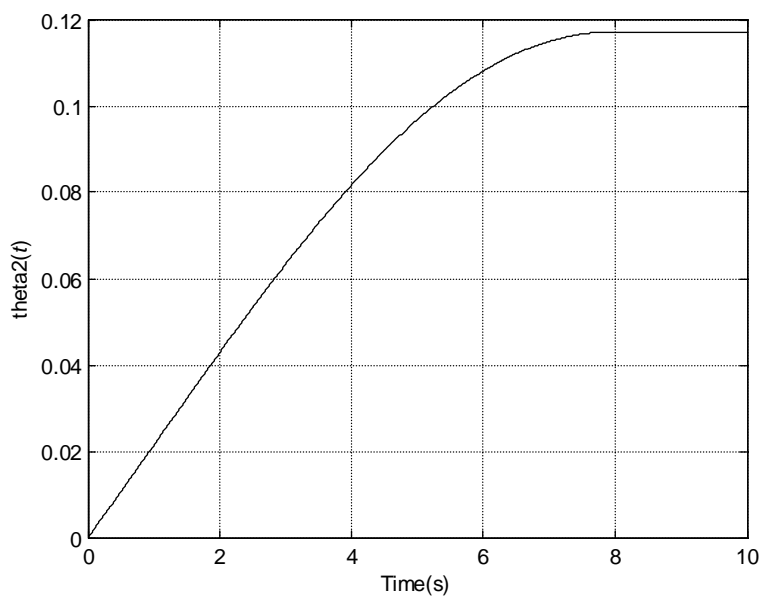


图 3-11 分数阶 Lorenz 系统的滑模自适应控制效果： θ_2 自适应估计

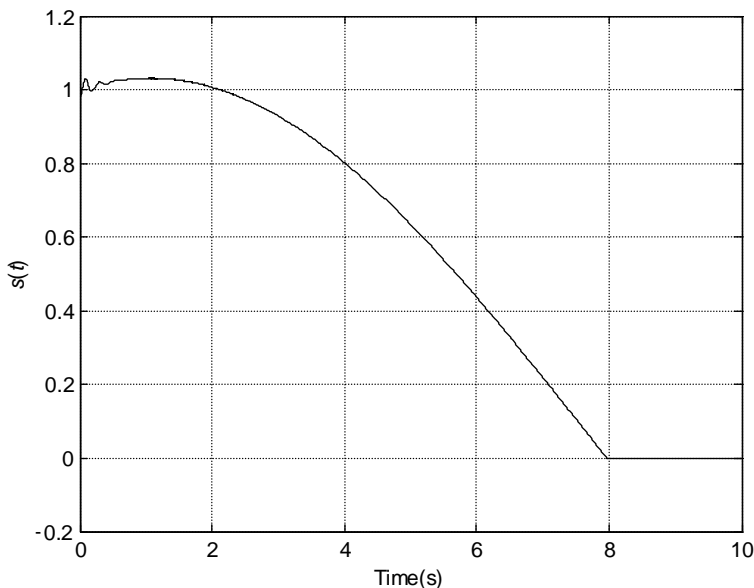


图 3-12 分数阶 Lorenz 系统的滑模自适应控制效果: 滑模面的运动状态

主程序 AdaptiveSlidingLorenzsC.m 如下:

```
function [T, Y]=AdaptiveSlidingLorenzsC(parameters, orders, TSim, Y0)
h=0.0005;
% number of calculated mesh points:
n=round(TSim/h);
%orders of derivatives, respectively:
q1=orders(1); q2=orders(2); q3=orders(3);
% constants of Lorenz's system:
sigma=parameters(1); rho=parameters(2); beta=parameters(3); k1=
parameters(4);
k2=parameters(5);mu=parameters(6);gamma=parameters(7);
% binomial coefficients calculation:
cp1=1; cp2=1; cp3=1;
for j=1:n
    c1(j)=(1-(1+q1)/j)*cp1;
    c2(j)=(1-(1+q2)/j)*cp2;
    c3(j)=(1-(1+q3)/j)*cp3;
    cp1=c1(j); cp2=c2(j); cp3=c3(j);
end
```

```

% initial conditions setting:
s(1)=Y0(1);x(1)=Y0(2); y(1)=Y0(3); z(1)=Y0(4); theta1(1)=Y0(5);
theta2(1)=Y0(6);u(1)=Y0(7);

% calculation of phase portraits /numerical solution/:
for i=2:n
    s(i)=x(i-1)+1/1.0041*h^(q1)*memos(10*x+28*y,i-1);
    x(i)=(0.1+0.1*sin(pi*x(i-1))+0.1*cos(i)-sigma*x(i-1)-rho*y(i-1)-
(k1+theta1(i-1)+theta2(i-1))*sign(s(i))-k2*s(i))*h^q1 - memo(x, c1, i);
    y(i)=(0.1-0.2*sin(pi*y(i-1))+0.2*sin(2*i)+x(i)*(rho-z(i-1))-
y(i-1))*h^q2 - memo(y, c2, i);
    z(i)=(0.1*x(i)*cos(pi*z(i-1))+0.1*cos(pi*i)+x(i)*y(i)-beta*
z(i-1))*h^q3 - memo(z, c3, i);
    theta1(i)=mu*1/1.0041*h^(q1)*memos(abs(s),i);
    theta2(i)=gamma*1/1.0041*h^(q1)*memos(abs(s),i);
    u(i)=-(sigma+rho)*y(i)-(theta1(i)+theta2(i)+k1)*sign(s(i))-
k2*s(i);
end
for j=1:n
    Y(j,1)=s(j);
    Y(j,2)=x(j);
    Y(j,3)=y(j);
    Y(j,4)=z(j);
    Y(j,5)=theta1(j);
    Y(j,6)=theta2(j);
    Y(j,7)=u(j);
end
T=h:h:TSim;

```

图 3-4~图 3-6 的仿真程序如下:

```

[t, y]=AdaptiveSlidingLorenzsc([10 28 8/3 0.02 0.02 0.03 0.02],
[0.993 0.993 0.993],10,[1 1 1 0.03 0.02 -38]);
plot(t,y(:,2),'k');
axis([0 5 -1 1]);
xlabel('Time(sec)');
ylabel('x(t)');
grid on;

```


图 3-7 的仿真程序如下:

```
[t, y]=AdaptiveSlidingLorenzsC([10 28 8/3 0.02 0.02 0.03 0.02],  
[0.993 0.993 0.993],10,[1 1 1 1 0.03 0.02 -38]);  
plot(t,y(:,4),'k');  
axis([0 5 -1 1]);  
xlabel('Time(sec)');  
ylabel('z(t)');  
grid on;
```

图 3-8 的仿真程序如下:

```
[t, y]=AdaptiveSlidingLorenzsC([10 28 8/3 0.02 0.02 0.03 0.02],  
[0.993 0.993 0.993],10,[1 1 1 1 0.03 0.02 -38]);  
plot(t,y(:,7),'k');  
axis([0 5 -50 50]);  
xlabel('Time(sec)');  
ylabel('u(t)');  
grid on;
```

图 3-9 的仿真程序:

```
[t, y]=AdaptiveSlidingLorenzsC([10 28 8/3 0.02 0.02 0.03 0.02],  
[0.993 0.993 0.993],10,[1 1 1 1 0.03 0.02 -38]);  
plot(t,y(:,7),'k');  
axis([0 5 -50 50]);  
xlabel('Time(sec)');  
ylabel('u(t)');  
grid on;
```

图 3-10 的仿真程序如下:

```
[t, y]=AdaptiveSlidingLorenzsC([10 28 8/3 0.02 0.02 0.03 0.02],  
[0.993 0.993 0.993],10,[1 1 1 1 0.03 0.02 -38]);  
plot(t,y(:,5),'k');  
xlabel('Time(sec)');  
ylabel('thetal(t)');  
grid on;
```

图 3-11 的仿真程序如下:

```
[t, y]=AdaptiveSlidingLorenzsC([10 28 8/3 0.02 0.02 0.03 0.02],
```

```
[0.993 0.993 0.993],10,[1 1 1 1 0.03 0.02 -38]);
plot(t,y(:,6),'k');
xlabel('Time(sec)');
ylabel('theta2(t)');
grid on;
```

图 3-12 的仿真程序如下:

```
[t, y]=AdaptiveSlidingLorenzsC([10 28 8/3 0.02 0.02 0.03 0.02],
[0.993 0.993 0.993],10,[1 1 1 1 0.03 0.02 -38]);

plot(t,y(:,1),'k');
xlabel('Time(sec)');
ylabel('s(t)');
grid on;
```

3.2.3 分数阶 Lorenz-Stenflo 系统的滑模控制律设计与仿真

现在, 我们应用 Mittag-Leffler 稳定性定理, 开展分数阶 Lorenz-Stenflo 系统的滑模控制律设计。目前 Mittag-Leffler 稳定性定理只能应用于同元阶次系统, 因此, 假设分数阶 Lorenz-Stenflo 系统的状态方程的导数是一致的, 即 $q_1 = q_2 = q_3 = q$ 。

首先, 设计分数阶滑模面

$$s(t) = x_1(t) + {}_0^C D_t^{-q} \phi(t) \quad (3-26)$$

求 $s(t)$ 的 q 阶导数, 得

$${}_0^C D_t^q s(t) = {}_0^C D_t^q x_1(t) + \phi(t) \quad (3-27)$$

式中, $\phi(t)$ 的取值与 2.4.3 节中相同: $\phi(t) = -x_1 - rx_2 + x_4$

令 ${}_0^C D_t^q s(t) = 0$, 得到分数阶滑模面的动力学方程

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^q x_1(t) = x_1 + rx_2 - x_4 \\ {}_0^C D_t^q x_2 = x_1(r - x_3) - x_2 \\ {}_0^C D_t^q x_3 = x_1 x_2 - \beta x_3 \\ {}_0^C D_t^q x_4 = -x_1 - \alpha x_4 \end{cases} \quad (3-28)$$

为了分析分数阶滑模面的动力学稳定性，选取 Lyapunov 函数

$$V_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 x_i^2$$

求 V_1 的 q 阶导数，得

$$\begin{aligned} {}^C_0 D_t^q V_1 &= \sum_{i=1}^4 x_i {}^C_0 D_t^q x_i \\ &= -x_1^2 - x_2^2 - \beta x_3^2 - \alpha x_4^2 \\ &\quad - \eta V_1 \end{aligned} \quad (3-29)$$

式中， $\eta = 2 \min\{1, \alpha, \beta\}$ 。

根据 Mittag-Leffler 稳定性定理，不等式 (3-29) 说明分数阶滑模面动力学方程是 Mittag-Leffler 稳定的，也是渐近稳定的。

下面开始设计滑模控制律。选取 Lyapunov 函数

$$V_2(t) = \frac{1}{2} s^2$$

求导，得

$$\begin{aligned} {}^C_0 D_t^q V_2(t) &= s_2(t) {}^C_0 D_t^q s_2(t) \\ &= s_2 \left[(1-\alpha)x_1 + (\alpha+r)x_2 + (\gamma-1)x_4 + u_2 \right] \end{aligned} \quad (3-30)$$

根据式 (3-30) 设计控制律

$$u_2(t) = (\alpha-1)x_1 - (\alpha+r)x_2 - (\gamma-1)x_4 - k_1 \operatorname{sgn}(s_2) - k_2 s_2 \quad (3-31)$$

将式 (3-31) 代入式 (3-30)，得

$$\begin{aligned} {}^C_0 D_t^q V_2(t) &= s_2 \left[-k_1 \operatorname{sgn}(s_2) - k_2 s_2 \right] \\ &= -k_1 \sqrt{V_2} - k_2 V_2 \end{aligned} \quad (3-32)$$

根据 Mittag-Leffler 稳定性定理， V_2 在有限时间渐近趋于零。

更进一步，考虑系统存在不确定性及外部扰动时的滑模控制设计。此时系统的状态方程为

$$\begin{cases} {}^C_0 D_t^q x_1 = \alpha(x_2 - x_1) + \gamma x_4 + \Delta f_1 + d_1 \\ {}^C_0 D_t^q x_2 = x_1(r - x_3) - x_2 + \Delta f_2 + d_2 \\ {}^C_0 D_t^q x_3 = x_1 x_2 - \beta x_3 + \Delta f_3 + d_3 \\ {}^C_0 D_t^q x_4 = -x_1 - \alpha x_4 + \Delta f_4 + d_4 \end{cases} \quad (3-33)$$

式中, Δf_i 是系统不确定性, d_i 表示外部扰动。假设 Δf_i 及 d_i 都是有界的, $i=1,2,3$ 。

设计与式 (3-26) 相同的分数阶滑模面, 此时滑模动力学方程为

$$\begin{cases} {}^C_0 D_t^q x_1(t) = x_1 + r x_2 - x_4 \\ {}^C_0 D_t^q x_2 = x_1(r - x_3) - x_2 + \Delta f_2 + d_2 \\ {}^C_0 D_t^q x_3 = x_1 x_2 - \beta x_3 + \Delta f_3 + d_3 \\ {}^C_0 D_t^q x_4 = -x_1 - \alpha x_4 + \Delta f_4 + d_4 \end{cases} \quad (3-34)$$

下面利用 Lyapunov 函数 V_1 来分析滑模动力学方程的渐近稳定性。求 V_1 的 q 阶导数:

$$\begin{aligned} {}^C_0 D_t^q V_1 &= \sum_{i=1}^4 x_i {}^C_0 D_t^q x_i \\ &= -x_1^2 - x_2^2 - \beta x_3^2 - \alpha x_4^2 + x_2(\Delta f_2 + d_2) + \\ &\quad x_3(\Delta f_3 + d_3) + x_4(\Delta f_4 + d_4) \\ &\quad - \eta V_1 + \rho \end{aligned} \quad (3-35)$$

式中, $\eta = 2 \min\{1, \alpha, \beta\}$,

$$\rho = |x_2|(|\Delta f_2| + |d_2|) + |x_3|(|\Delta f_3| + |d_3|) + |x_4|(|\Delta f_4| + |d_4|)$$

根据文献[94]中的定理 2, 不等式 (3-35) 推出滑模动力学方程 (3-34) 是渐近稳定的。

下面开始设计滑模控制律, 未知参数通过自适应技术估计。

选取 Lyapunov 函数

$$V_3 = \frac{1}{2} \left[s_2^2 + \frac{1}{\mu_1} (\hat{\theta}_1 - \theta_1)^2 + \frac{1}{\mu_2} (\hat{\theta}_2 - \theta_2)^2 \right]$$

求 V_3 的 q 阶导数, 得

$$\begin{aligned} {}^C_0 D_t^q V_3(t) &= s_2 {}^C_0 D_t^q s_2 + \frac{1}{\mu_1} (\hat{\theta}_1 - \theta_1) {}^C_0 D_t^q \hat{\theta}_1 + \frac{1}{\mu_2} (\hat{\theta}_2 - \theta_2) {}^C_0 D_t^q \hat{\theta}_2 \\ &= s \left[(1-\alpha)x_1 + (\alpha+r)x_2 + (\gamma-1)x_4 + \Delta f_1 + d_1 + u_2 \right] \\ &\quad + \frac{1}{\mu_1} (\hat{\theta}_1 - \theta_1) {}^C_0 D_t^q \hat{\theta}_1 + \frac{1}{\mu_2} (\hat{\theta}_2 - \theta_2) {}^C_0 D_t^q \hat{\theta}_2 \end{aligned} \quad (3-36)$$

根据式 (3-36) 设计控制律及自适应律

$$\begin{aligned} u_2(t) &= (\alpha-1)x_1 - (\alpha+r)x_2 - (\gamma-1)x_4 \\ &\quad - (\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 + k_1) \operatorname{sgn}(s_2) - k_2 s_2 \end{aligned} \quad (3-37)$$

$$\begin{cases} {}^C_0 D_t^q \hat{\theta}_1 = \mu_1 |s_2| \\ {}^C_0 D_t^q \hat{\theta}_2 = \mu_2 |s_2| \end{cases} \quad (3-38)$$

将式 (3-37) 及式 (3-38) 代入不等式 (3-36), 得

$${}^C_0 D_t^q V_5(t) \leq -k_1 |s_2| - k_2 s_2^2 \quad (3-39)$$

显然, ${}^C_0 D_t^q V_5(x, y, z, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) \leq 0$, 且 ${}^C_0 D_t^q V_5(x, y, z, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = 0$ 当且仅当 $s = 0$ 。从而 $x, y, z \rightarrow 0$, $\hat{\theta}_1 \rightarrow \theta_1$, $\hat{\theta}_2 \rightarrow \theta_2$ 。

至此, 针对分数阶 Lorenz-Stenflo 超混沌系统存在不确定性及外部扰动时, 设计了滑模控制律 (3-37) 及自适应律 (3-38)。

以下通过数值模拟验证控制律的效果。根据文献[99]中的初始化方法, 如果分数阶微分方程的阶次在区间 (0,1), 则初始条件可以取为关于时间的常数。因此, 设定分数阶 Lorenz-Stenflo 超混沌系统的初始条件为

$$\begin{cases} x_1(t) = x_1(0^+) = 2.8 \\ x_2(t) = x_2(0^+) = 2 \\ x_3(t) = x_3(0^+) = 3 \\ x_4(t) = x_4(0^+) = 4 \end{cases}$$

式中, $-\infty < t < 0$ 。

图 3-13 和图 3-14 显示了分数阶 Lorenz-Stenflo 超混沌系统在滑模控制律

(3-31) 作用下的控制效果曲线。控制增益取为 $k_1 = 0.05$, $k_2 = 0.1$ 。

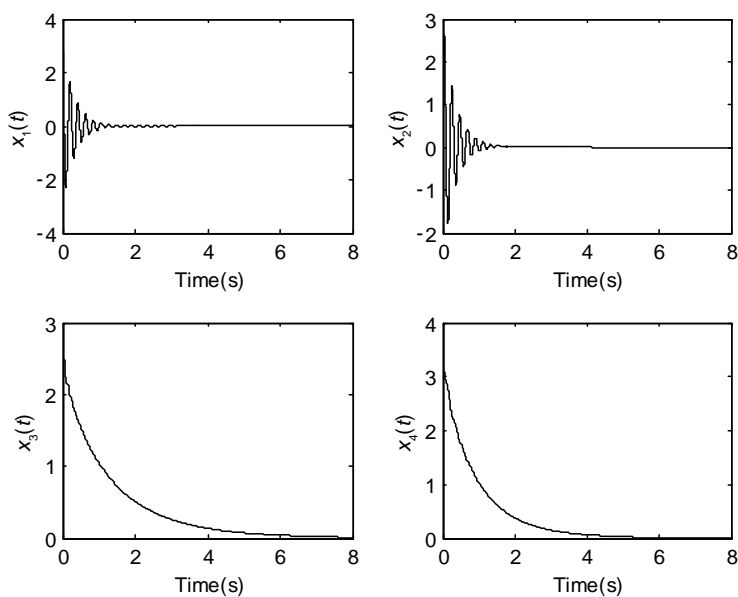
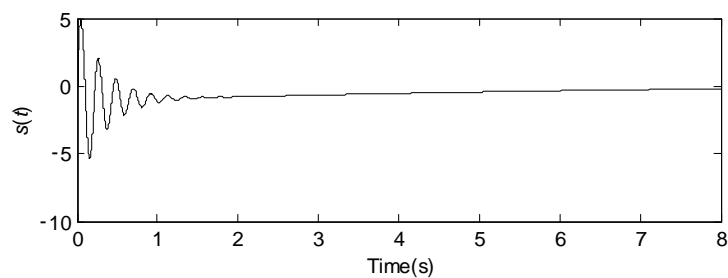
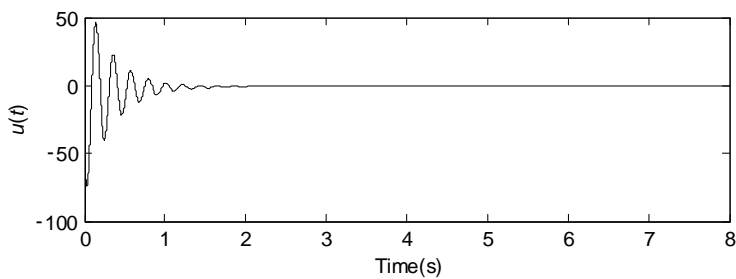


图 3-13 滑模控制效果：受控状态的变化



(a)



(b)

图 3-14 滑模控制效果：滑模面及控制律的变化

图 3-15 和图 3-16 显示了分数阶 Lorenz-Stenflo 超混沌系统在外扰动条件下滑模控制律 (3-37) 及自适应律 (3-38) 的控制效果曲线。其中自适应参数取为 $\mu_1 = 0.01$, $\mu_2 = 0.01$, 控制律增益取为 $k = 0.1$ 。系统的不确定性假设为 $\Delta f = 0.1\sin(\pi x_1)\cos x_1$, 假设外部扰动为 $d(t) = 0.2\cos t$ 。

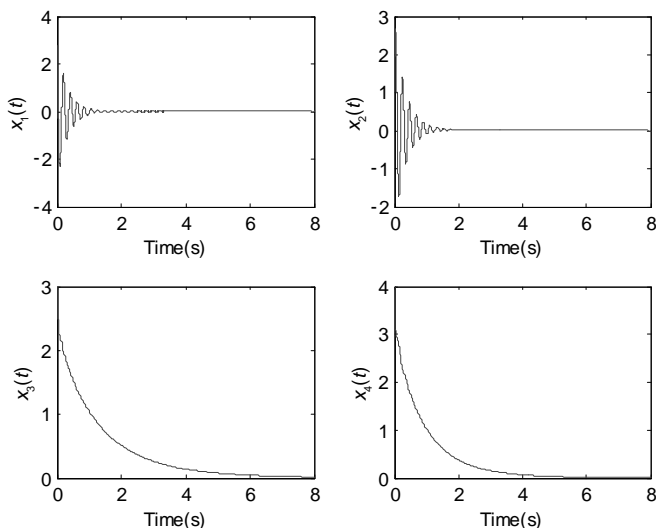


图 3-15 滑模自适应控制效果：受控状态的变化

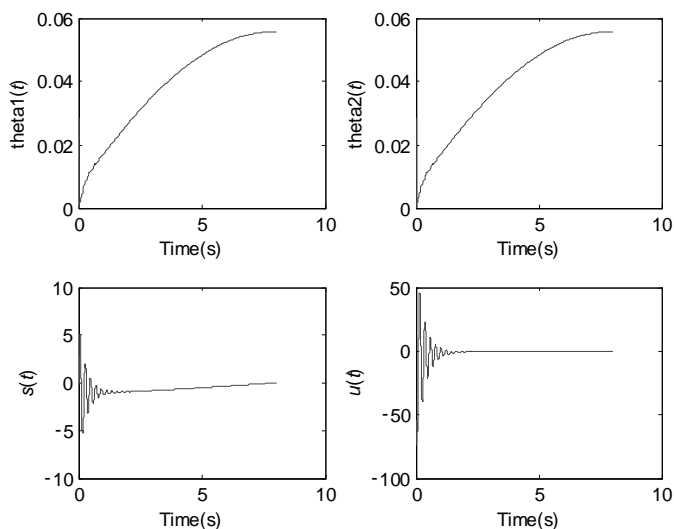


图 3-16 滑模自适应控制效果：滑模面、控制律及自适应参数的变化

滑模控制的主程序为 control1.m:

```
function [T,Y]=control1(parameters, orders, TSim, Y0)
h=0.0005;
n=round(TSim/h);
q1=orders(1); q2=orders(2); q3=orders(3);q4=orders(4);
k1=parameters(1);k2=parameters(2);

% binomial coefficients calculation:
cp1=1; cp2=1; cp3=1;cp4=1;
for j=1:n
    c1(j)=(1-(1+q1)/j)*cp1;
    c2(j)=(1-(1+q2)/j)*cp2;
    c3(j)=(1-(1+q4)/j)*cp4;
    c4(j)=(1-(1+q3)/j)*cp3;
    cp1=c1(j); cp2=c2(j); cp3=c3(j);cp4=c4(j);
end
% initial conditions setting:
s(1)=Y0(1);x(1)=Y0(2); y(1)=Y0(3); z(1)=Y0(4); w(1)=Y0(5);u(1)=
Y0(6);
% calculation of phase portraits /numerical solution/:
for i=2:n
    s(i)=1/gamma(1-q1)*h^(1-q1)*memos(x,i-1)+h*memos(x,i)+26*h*
memos(y,i)-h*memos(w,i);
    x(i)=(y(i-1)-x(i-1)+1.5*w(i-1)+u(i-1))*h^q1 - memo(x, c1, i);
    y(i)=(26*x(i)-y(i-1)-x(i)*z(i-1))*h^q2 - memo(y, c2, i);
    z(i)=(x(i)*y(i)-0.7*z(i-1))*h^q3 - memo(z, c3, i);
    w(i)=(-x(i)-w(i-1))*h^q4 - memo(w, c4, i);
    u(i)=-27*y(i)-0.5*w(i)-k1*sign(s(i))-k2*s(i);
end
for j=1:n
    Y(j,1)=s(j);
    Y(j,2)=x(j);
    Y(j,3)=y(j);
    Y(j,4)=z(j);
    Y(j,5)=w(j);
    Y(j,6)=u(j);
end
```



```
T=h:h:TSim;
```

运行程序为 demo_control1.m:

```
k1=0.05;k2=0.1;
[t, y]=control1([k1 k2], [0.96 0.96 0.96 0.96], 8, [ 2.8254 2.8 2
3 4 -56-k1-2.8254*k2 ]);
figure(1);
subplot(2,2,1);
plot(t,y(:,2),'k');
xlabel('Time(sec)');
ylabel('x1(t)');
subplot(2,2,2);
plot(t,y(:,3),'k');
xlabel('Time(sec)');
ylabel('x2(t)');

subplot(2,2,3);
plot(t,y(:,4),'k');
xlabel('Time(sec)');
ylabel('x3(t)');
subplot(2,2,4);
plot(t,y(:,5),'k');
xlabel('Time(sec)');
ylabel('x4(t)');

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% s,e %%%%%%%%%%%%%%
figure(2);
subplot(2,1,1);
plot(t,y(:,1),'k');
xlabel('Time(sec)');
ylabel('s(t)');
title('a')

subplot(2,1,2);
plot(t,y(:,6),'k');
xlabel('Time(sec)');
ylabel('u(t)');
title('b')
```

自适应滑模控制的主程序为 control2.m:

```
function [T,Y]=control2(parameters,orders, TSim, Y0)
h=0.0005;
n=round(TSim/h);
q1=orders(1); q2=orders(2); q3=orders(3);q4=orders(4);
k=parameters(1);mu1=parameters(2);mu2=parameters(3);
% binomial coefficients calculation:
cp1=1; cp2=1; cp3=1;cp4=1;
for j=1:n
    c1(j)=(1-(1+q1)/j)*cp1;
    c2(j)=(1-(1+q2)/j)*cp2;
    c3(j)=(1-(1+q4)/j)*cp4;
    c4(j)=(1-(1+q3)/j)*cp3;
    cp1=c1(j); cp2=c2(j); cp3=c3(j);cp4=c4(j);
end
% initial conditions setting:
s(1)=Y0(1);x(1)=Y0(2); y(1)=Y0(3); z(1)=Y0(4); w(1)=Y0(5);
thetal(1)=Y0(6);theta2(1)=Y0(7);u(1)=Y0(8);
% calculation of phase portraits /numerical solution/:
for i=2:n

    s(i)=1/gamma(1-q1)*h^(1-q1)*memos(x,i-1)+h*memos(x,i)+26*h*
memos(y,i)-h*memos(w,i);
    x(i)=(y(i-1)-x(i-1)+1.5*w(i-1)+u(i-1)+0.1*sin(pi*x(i-1)))*
cos(0.1*y(i-1))+0.2*cos(2*i))*h^q1 - memo(x, c1, i);
    y(i)=(26*x(i)-y(i-1)-x(i)*z(i-1))*h^q2 - memo(y, c2, i);
    z(i)=(x(i)*y(i)-0.7*z(i-1))*h^q3 - memo(z, c3, i);
    w(i)=(-x(i)-w(i-1))*h^q4 - memo(w, c4, i);
    thetal(i)=mu1*h*memos(abs(s),i);
    theta2(i)=mu2*h*memos(abs(s),i);
    u(i)=-27*y(i)-0.5*w(i)-(thetal(i)+theta2(i)+k)*sign(s(i));
end
for j=1:n
    Y(j,1)=s(j);
    Y(j,2)=x(j);
    Y(j,3)=y(j);
    Y(j,4)=z(j);
```

```

Y(j,5)=w(j);
Y(j,6)=theta1(j);
Y(j,7)=theta2(j);
Y(j,8)=u(j);
end
T=h:h:TSim;
%
```

运行程序为 demo_control2.m:

```

k= 0.05;
mu1=0.01;
mu2= 0.01;
[t, y]=control2([k mu1 mu2],[0.96 0.96 0.96 0.96], 8, [2.8254 2.8
2 3 4 2.8254*mu1 2.8254*mu2 -56-k-2.8254*mu1-2.8254*mu2]);
figure(1);
subplot(2,2,1);
plot(t,y(:,2));
xlabel('Time(sec)');
ylabel('x1(t)')
subplot(2,2,2);
plot(t,y(:,3));
xlabel('Time(sec)');
ylabel('x2(t)')
subplot(2,2,3);
plot(t,y(:,4));
xlabel('Time(sec)');
ylabel('x3(t)')
subplot(2,2,4);
plot(t,y(:,5));
xlabel('Time(sec)');
ylabel('x4(t)')
%%%%%%%%%%%% s,e,k %%%%%%%%%%%%%figure(2);
subplot(2,2,1);
plot(t,y(:,6));
xlabel('Time(sec)');
ylabel('theta1(t)')
subplot(2,2,2);
plot(t,y(:,7));
```

```
xlabel('Time(sec)');  
ylabel('theta2(t)')  
subplot(2,2,3);  
plot(t,y(:,1));  
xlabel('Time(sec)');  
ylabel('s(t)')  
subplot(2,2,4);  
plot(t,y(:,8));  
xlabel('Time(sec)');  
ylabel('u(t)')
```

3.3 无穷维状态方法与 Mittag-Leffler 稳定性方法的比较

无穷维状态方法与 Mittag-Leffler 稳定性方法是目前分析分数阶非线性微分方程动力学稳定性的两大主要理论方法，本章分别基于这两个理论，针对新型的分数阶混沌系统设计了分数阶滑模控制律，现总结它们各自的特点。

无穷维状态方法的理论基础是分数阶积分算子的扩散模型表示。该方法将分数阶积分算子转化为等价的无穷维连续频率分布模型，将分数阶系统转化为等价的无穷维整数阶微分系统，从而可以方便地将整数阶动力学系统理论推广到分数阶动力系统，研究分数阶系统建模、初始化问题、动力学响应、控制设计等一系列理论和方法。尤其在分析分数阶动力学系统的稳定性时，基于频率分布模型设计的 Lyapunov 函数，既适用于同元阶次的系统，又适用于异元阶次的系统。然而，无穷维状态理论仍有很多方面需要完善，如 Lyapunov 函数的正定性未得到证明、Lyapunov 函数导数的无穷积分项有待进一步处理。

Mittag-Leffler 稳定性方法是整数阶微分方程稳定性理论的直接推广。由于二次型函数的 Caputo 导数满足不等式关系（见引理 1.5），因此，应用 Mittag-Leffler 稳定性方法可以方便地分析 Caputo 型同元阶次分数阶系统的动力学稳定性。然而，对于含有其他类型的分数阶系统及异元阶次的分数阶系统的稳定性分析，该方法还有待完善。

3.4 本章小结

本章针对第2章提出的一类分数阶混沌系统的统一表达式，设计了分数阶滑模面，基于 Mittag-Leffler 稳定性定理证明了该滑模面的动力学稳定性，设计了分数阶滑模控制律，并将该方法应用于分数阶 Lorenz 系统及分数阶 Chen 系统两类具体的分数阶混沌系统，并通过数值仿真验证了该方法的有效性。最后，总结了无穷维状态方法与 Mittag-Leffler 稳定性方法在分析分数阶非线性微分方程动力学稳定性方面的特点。

第 4 章

分数阶统一混沌系统的同步设计：滑模方法（I）

第 2、3 章介绍了一类分数阶混沌系统的控制问题即镇定问题，目的是避免或消除不希望出现的混沌现象。本章将介绍分数阶统一混沌系统之间的同步控制设计：4.1 节给出驱动系统的状态方程与响应系统的状态方程，4.2 节针对分数阶统一混沌系统的标称模型，基于分数阶线性系统的稳定性判据和系统模型本身的特征设计滑模控制律，4.3 节进一步针对系统存在不确定性的情形，设计滑模自适应控制律，4.4 节对设计的滑模控制律进行数值仿真，以验证方法的有效性。

4.1 问题描述

文献[100]引入了如下统一形式的混沌系统：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (25\alpha + 10)(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 = (28 - 35\alpha)x_1 - x_1x_3 + (29\alpha - 1)x_2 \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - (8 + \alpha)x_3 / 3 \end{cases} \quad (4-1)$$

具有式 (4-1) 形式的混沌系统称为统一混沌系统^[101], 其中 x_1, x_2, x_3 为系统的状态变量, α 为系统参数, 在 $[0,1]$ 中任意取值。当 $\alpha \in [0,0.8]$ 时, 系统为广义的 Lorenz 混沌系统; 当 $\alpha = 0.8$ 时, 系统为 Lü 系统; 当 $\alpha \in (0.8,1]$ 时, 系统为 Chen 系统。

基于如上定义的统一混沌系统, 文献[102]引入了如下形式的分数阶统一混沌系统:

$$\begin{cases} D^{q_1} x_1 = (25\alpha + 10)(x_2 - x_1) \\ D^{q_2} x_2 = (28 - 35\alpha)x_1 - x_1 x_3 + (29\alpha - 1)x_2 \\ D^{q_3} x_3 = x_1 x_2 - (8 + \alpha)x_3 / 3 \end{cases} \quad (4-2)$$

式中, $q_1, q_2, q_3 \in (0,1]$ 为分数阶导数的阶次。

为了实现两个分数阶统一混沌系统的同步, 将式 (4-2) 作为驱动系统, 将式 (4-3) 作为受控的响应系统

$$\begin{cases} D^{q_1} y_1 = (25\alpha + 10)(y_2 - y_1) + u_1 \\ D^{q_2} y_2 = (28 - 35\alpha)y_1 - y_1 y_3 + (29\alpha - 1)y_2 + u_2 \\ D^{q_3} y_3 = y_1 y_2 - (8 + \alpha)y_3 / 3 + u_3 \end{cases} \quad (4-3)$$

定义响应系统 (4-3) 与驱动系统 (4-2) 之间的状态误差

$$e_1 = y_1 - x_1, \quad e_2 = y_2 - x_2, \quad e_3 = y_3 - x_3$$

由式 (4-3) 和式 (4-2), 得到如下状态误差的动力学方程:

$$\begin{cases} D^{q_1} e_1 = (25\alpha + 10)(e_2 - e_1) + u_1 \\ D^{q_2} e_2 = (28 - 35\alpha)e_1 + e_1 e_3 - e_1 y_3 - e_3 y_1 + (29\alpha - 1)e_2 + u_2 \\ D^{q_3} e_3 = -e_1 e_2 + e_1 y_2 + e_2 y_1 - (8 + \alpha)e_3 / 3 + u_3 \end{cases} \quad (4-4)$$

本章的目标是设计滑模控制律, 实现两个分数阶统一混沌系统 (4-2) 与系统 (4-3) 之间的同步。显然, 该同步问题等价于误差系统 (4-4) 的镇定问题。

4.2 标称混沌系统之间的同步设计

本节考虑混沌系统不存在不确定性和外部扰动的简单情形，即标称混沌系统之间的同步问题。设计步骤如下：

步骤 1. 分数阶滑模面设计

首先引入如下 3 个分数阶滑模面：

$$s_i(t) = (D^{q_i} + \lambda_i) \int_0^t e_i(\tau) d\tau, i = 1, 2, 3 \quad (4-5)$$

求式 (4-5) 的一阶导数，得

$$\dot{s}_i(t) = D^{q_i} e_i(t) + \lambda_i e_i(t) \quad (4-6)$$

当误差系统 (4-4) 的状态在滑模面 (4-5) 上运动时，满足 $s = 0$ 与 $\dot{s} = 0$ ，因此，得到滑模动力学方程

$$\begin{cases} D^{q_1} e_1 = -\lambda_1 e_1 \\ D^{q_2} e_2 = -\lambda_2 e_2 \\ D^{q_3} e_3 = -\lambda_3 e_3 \end{cases} \quad (4-7)$$

显然滑模动力学方程 (4-7) 的所有误差状态渐近趋于零。

步骤 2. 误差系统的控制设计

设计 Lyapunov 函数

$$V_1(t) = \frac{1}{2} s_1^2$$

求 $V_1(t)$ 关于时间的一阶导数

$$\dot{V}_1(t) = s_1 \dot{s}_1 = s_1 (D^{q_1} e_1 + \lambda_1 e_1) \quad (4-8)$$

将误差系统 (4-4) 的第一个状态方程代入式 (4-8)，得

$$\dot{V}_1(t) = s_1 [(25\alpha + 10)(e_2 - e_1) + u_1 + \lambda_1 e_1] \quad (4-9)$$

根据式 (4-9) 设计第一个控制律

$$u_1 = -(25\alpha + 10)(e_2 - e_1) - \lambda_1 e_1 - k_1 \text{sign}(s_1) \quad (4-10)$$

将控制律 (4-10) 代入式 (4-9)

$$\dot{V}_1(t) = -k_1 |s_1| \quad (4-11)$$

设计第二个 Lyapunov 函数

$$V_2(t) = \frac{1}{2} s_2^2$$

求 $V_2(t)$ 关于时间的一阶导数, 得

$$\dot{V}_2(t) = s_2 \dot{s}_2 = s_2 (D^{q_2} e_2 + \lambda_2 e_2) \quad (4-12)$$

将误差系统 (4-4) 的第二个状态方程代入式 (4-12), 得

$$\dot{V}_2(t) = s_2 [(28 - 35\alpha)e_1 + e_1 e_3 - e_1 y_3 - e_3 y_1 + (29\alpha - 1)e_2 + u_2 + \lambda_2 e_2] \quad (4-13)$$

根据式 (4-13) 设计第二个控制律

$$u_2 = -(28 - 35\alpha)e_1 - e_1 e_3 + e_1 y_3 + e_3 y_1 - (29\alpha - 1)e_2 - \lambda_2 e_2 - k_2 \text{sign}(s_2) \quad (4-14)$$

将式 (4-14) 代入式 (4-13), 得

$$\dot{V}_2(t) = -k_2 |s_2| \quad (4-15)$$

设计第三个 Lyapunov 函数

$$V_3(t) = \frac{1}{2} s_3^2$$

求 $V_3(t)$ 关于时间的一阶导数, 得

$$\dot{V}_3(t) = s_3 \dot{s}_3 = s_3 (D^{q_3} e_3 + \lambda_3 e_3) \quad (4-16)$$

将误差系统 (4-4) 的第三个状态方程代入式 (4-16), 得

$$\dot{V}_3(t) = s_3 [-e_1 e_2 + e_1 y_2 + e_2 y_1 - (8 + \alpha)e_3 / 3 + u_3 + \lambda_3 e_3] \quad (4-17)$$

根据式 (4-17) 设计第三个控制律

$$u_3 = e_1 e_2 - e_1 y_2 - e_2 y_1 + (8 + \alpha)e_3 / 3 - \lambda_3 e_3 - k_3 \text{sign}(s_3) \quad (4-18)$$

将式 (4-18) 代入式 (4-17), 得

$$\dot{V}_3(t) = -k_3 |s_3| \quad (4-19)$$

最后, 令

$$V(s_1, s_2, s_3) = \frac{1}{2}s_1^2 + \frac{1}{2}s_2^2 + \frac{1}{2}s_3^2$$

对 $V(s_1, s_2, s_3)$ 求导, 并由式 (4-11)、式 (4-15)、式 (4-19) 得

$$\dot{V}(s_1, s_2, s_3) = -(k_1|s_1| + k_2|s_2| + k_3|s_3|) \quad (4-20)$$

选择 k 使得如下关系式成立:

$$k_1|s_1| + k_2|s_2| + k_3|s_3| > k\|s\|$$

式中, $\|s\| = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}$ 。

式 (4-20) 变为

$$\dot{V}(s_1, s_2, s_3) < -k\|s\|$$

通过上述设计过程, 得到如下结论:

定理 4.1 在分数阶滑模控制律 (4-10)、(4-14)、(4-18) 的作用下, 误差系统 (4-4) 状态渐近趋于零, 从而实现了分数阶统一混沌系统 (4-3) 与 (4-2) 之间的同步。

4.3 不确定混沌系统之间的同步

本节考虑分数阶统一混沌系统的响应系统 (4-3) 存在不确定性与外部扰动时的同步问题, 此时响应系统的状态方程为

$$\begin{cases} D^\alpha y_1 = (25\alpha + 10)(y_2 - y_1) + \Delta f_1 + d_1 + u_1 \\ D^\alpha y_2 = (28 - 35\alpha)y_1 - y_1 y_3 + (29\alpha - 1)y_2 + \Delta f_2 + d_2 + u_2 \\ D^\alpha y_3 = y_1 y_2 - (8 + \alpha)y_3 / 3 + \Delta f_3 + d_3 + u_3 \end{cases} \quad (4-21)$$

假设不确定性 Δf_1 , Δf_2 , Δf_3 和外部扰动 d_1, d_2, d_3 是有界的, 即 $|\Delta f_i| < \rho_i$, $|d_i(t)| < \theta_i$ 。其中 ρ_i , θ_i 为未知常数。记 $\hat{\rho}_i$ 为 ρ_i 的估计值, $\hat{\theta}_i$ 为 θ_i 的估计值。采用自适应技术得到 ρ_i 与 θ_i 的估计值 $\hat{\rho}_i$ 与 $\hat{\theta}_i$ 。

误差系统的状态方程为

$$\begin{cases} D^q e_1 = (25\alpha + 10)(e_2 - e_1) + \Delta f_1 + d_1 + u_1 \\ D^q e_2 = (28 - 35\alpha)e_1 + e_1 e_3 - e_1 y_3 - e_3 y_1 + (29\alpha - 1)e_2 + \Delta f_2 + d_2 + u_2 \\ D^q e_3 = -e_1 e_2 + e_1 y_2 + e_2 y_1 - (8 + \alpha)e_3 / 3 + \Delta f_3 + d_3 + u_3 \end{cases} \quad (4-22)$$

下面对误差系统 (4-22) 设计滑模自适应控制律, 目的是实现 (4-22) 的镇定, 以及响应系统 (4-21) 与驱动系统 (4-2) 的同步。设计过程包括如下 4 个步骤:

步骤 1. 设计 Lyapunov 控制函数

$$V_1(t) = \frac{1}{2} \left[s_1^2 + \frac{1}{\mu_1} (\hat{\rho}_1 - \rho_1)^2 + \frac{1}{\gamma_1} (\hat{\theta}_1 - \theta_1)^2 \right]$$

对 $V_1(t)$ 求导, 得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) &= s_1 \dot{s}_1 + \frac{1}{\mu_1} (\hat{\rho}_1 - \rho_1) \dot{\hat{\rho}}_1 + \frac{1}{\gamma_1} (\hat{\theta}_1 - \theta_1) \dot{\hat{\theta}}_1 \\ &= s_1 (D^q e_1 + \lambda_1 e_1) + \frac{1}{\mu_1} (\hat{\rho}_1 - \rho_1) \dot{\hat{\rho}}_1 + \frac{1}{\gamma_1} (\hat{\theta}_1 - \theta_1) \dot{\hat{\theta}}_1 \end{aligned}$$

将式 (4-22) 的第一个状态方程代入上式, 得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) &= s_1 \left[(25\alpha + 10)(e_2 - e_1) + \Delta f_1 + d_1 + u_1 + \lambda_1 e_1 \right] + \\ &\quad \frac{1}{\mu_1} (\hat{\rho}_1 - \rho_1) \dot{\hat{\rho}}_1 + \frac{1}{\gamma_1} (\hat{\theta}_1 - \theta_1) \dot{\hat{\theta}}_1 \end{aligned} \quad (4-23)$$

分别设计第一组控制律与自适应律

$$u_1 = -(25\alpha + 10)(e_2 - e_1) - \lambda_1 e_1 - (\hat{\rho}_1 + \hat{\theta}_1 + k_1) \text{sign}(s_1) \quad (4-24)$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{\rho}}_1 = \mu_1 |s_1| \\ \dot{\hat{\theta}}_1 = \gamma_1 |s_1| \end{cases} \quad (4-25)$$

将控制律 (4-24) 与自适应律 (4-25) 代入式 (4-23), 得

$$\begin{aligned}
\frac{dV_1}{dt} &= s \left[(\Delta f_1 + d_1) - (\hat{\rho}_1 + \hat{\theta}_1 + k_1) \operatorname{sgn}(s_1) \right] + (\hat{\rho}_1 - \rho) |s_1| + (\hat{\theta}_1 - \theta_1) |s_1| \\
&\quad (|\Delta f_1| + |d_1|) |s_1| - (\hat{\rho}_1 + \hat{\theta}_1 + k_1) |s_2| + (\hat{\rho}_1 - \rho) |s_1| + (\hat{\theta}_1 - \theta_1) |s_1| \\
&< (\rho_1 + \theta_1) |s| - (\hat{\rho}_1 + \hat{\theta}_1 + k_1) |s| + (\hat{\rho}_1 - \rho) |s_1| + (\hat{\theta}_1 - \theta_1) |s_1| \\
&= -k_1 |s_1|
\end{aligned} \tag{4-26}$$

步骤 2. 设计第二个 Lyapunov 函数

$$V_2(t) = \frac{1}{2} \left[s_2^2 + \frac{1}{\mu_2} (\hat{\rho}_2 - \rho_2)^2 + \frac{1}{\gamma_2} (\hat{\theta}_2 - \theta_2)^2 \right]$$

对 $V_2(t)$ 求导, 得

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2(t) &= s_2 \dot{s}_2 + \frac{1}{\mu_2} (\hat{\rho}_2 - \rho_2) \dot{\hat{\rho}}_2 + \frac{1}{\gamma_2} (\hat{\theta}_2 - \theta_2) \dot{\hat{\theta}}_2 \\
&= s_2 (D^q e_2 + \lambda_2 e_2) + \frac{1}{\mu_2} (\hat{\rho}_2 - \rho_2) \dot{\hat{\rho}}_2 + \frac{1}{\gamma_1} (\hat{\theta}_2 - \theta_2) \dot{\hat{\theta}}_2
\end{aligned}$$

将式 (4-22) 的第二个状态方程代入上式, 得

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2(t) &= s_2 \left[(28 - 35\alpha) e_1 + e_1 e_3 - e_1 y_3 - e_3 y_1 + (29\alpha - 1) e_2 + \Delta f_2 + \right. \\
&\quad \left. d_2 + u_2 + \lambda_2 e_2 \right] + \frac{1}{\mu_2} (\hat{\rho}_2 - \rho_2) \dot{\hat{\rho}}_2 + \frac{1}{\gamma_2} (\hat{\theta}_2 - \theta_2) \dot{\hat{\theta}}_2
\end{aligned} \tag{4-27}$$

分别设计第二组控制律与自适应律

$$\begin{aligned}
u_2 &= -(28 - 35\alpha) e_1 - e_1 e_3 + e_1 y_3 + e_3 y_1 - (29\alpha - 1) e_2 - \\
&\quad \lambda_2 e_2 - (\hat{\rho}_2 + \hat{\theta}_2 + k_2) \operatorname{sign}(s_2)
\end{aligned} \tag{4-28}$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{\rho}}_2 = \mu_2 |s_2| \\ \dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma_2 |s_2| \end{cases} \tag{4-29}$$

将控制律 (4-28) 与自适应律 (4-29) 代入式 (4-27), 得

$$\dot{V}_2(t) < -k_2 |s_2| \tag{4-30}$$

步骤 3. 设计第三个 Lyapunov 函数

$$V_3(t) = \frac{1}{2} \left[s_3^2 + \frac{1}{\mu_3} (\hat{\rho}_3 - \rho_3)^2 + \frac{1}{\gamma_3} (\hat{\theta}_3 - \theta_3)^2 \right]$$

对 $V_3(t)$ 求导, 得

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(t) &= s_3 \dot{s}_3 + \frac{1}{\mu_3} (\hat{\rho}_3 - \rho_3) \dot{\hat{\rho}}_3 + \frac{1}{\gamma_3} (\hat{\theta}_3 - \theta_3) \dot{\hat{\theta}}_3 \\ &= s_3 (D^{q_3} e_3 + \lambda_3 e_3) + \frac{1}{\mu_3} (\hat{\rho}_3 - \rho_3) \dot{\hat{\rho}}_3 + \frac{1}{\gamma_3} (\hat{\theta}_3 - \theta_3) \dot{\hat{\theta}}_3 \end{aligned} \quad (4-31)$$

将式 (4-22) 的第三个状态方程代入上式, 得

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(t) &= s_3 \left[-e_1 e_2 + e_1 y_2 + e_2 y_1 - (8 + \alpha) e_3 / 3 + \Delta f_3 + d_3 + u_3 + \lambda_3 e_3 \right] + \\ &\quad \frac{1}{\mu_3} (\hat{\rho}_3 - \rho_3) \dot{\hat{\rho}}_3 + \frac{1}{\gamma_3} (\hat{\theta}_3 - \theta_3) \dot{\hat{\theta}}_3 \end{aligned} \quad (4-32)$$

分别设计第三组控制律与自适应律为

$$\begin{aligned} u_3 &= e_1 e_2 - e_1 y_2 - e_2 y_1 + (8 + \alpha) e_3 / 3 - \lambda_3 e_3 - \\ &\quad (\hat{\rho}_3 + \hat{\theta}_3 + k_3) \text{sign}(s_3) \end{aligned} \quad (4-33)$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{\rho}}_3 = \mu_3 |s_3| \\ \dot{\hat{\theta}}_3 = \gamma_3 |s_3| \end{cases} \quad (4-34)$$

将控制律 (4-33) 与自适应律 (4-34) 代入式 (4-32), 得

$$\dot{V}_3(t) < -k_3 |s_3| \quad (4-35)$$

步骤 4. 定义 Lyapunov 函数

$$V(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 s_i^2 + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2\mu_i} (\hat{\rho}_i - \rho_i)^2 + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2\gamma_i} (\hat{\theta}_i - \theta_i)^2$$

对 $V(t)$ 求导, 并由式 (4-26)、式 (4-30)、式 (4-35), 得

$$\dot{V}(t) < -(k_1 |s_1| + k_2 |s_2| + k_3 |s_3|) \quad (4-36)$$

选取某一 k 使得

$$k_1 |s_1| + k_2 |s_2| + k_3 |s_3| > k \|s\|$$

式 (4-36) 变为

$$\dot{V}(s_1, s_2, s_3) < -k \|s\|$$

式中, $\|s\| = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}$ 。

因此, 根据 Lyapunov 稳定性定理, 得到如下结论:

定理 4.2 在分数阶滑模控制律 (4-24)、(4-28)、(4-33) 与自适应律 (4-25)、(4-29)、(4-34) 的作用下, 误差系统 (4-22) 状态渐近趋于零, 从而实现了分数阶不确定统一混沌系统 (4-21) 与 (4-2) 之间的同步。

4.4 数值仿真

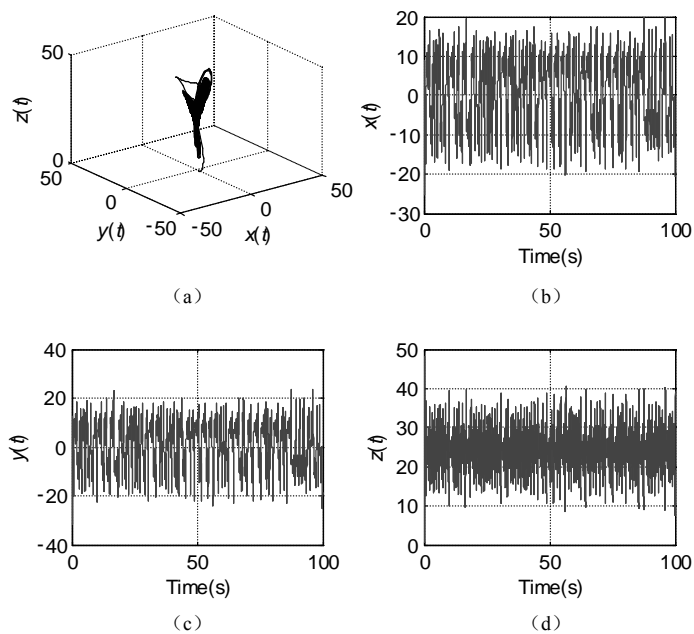
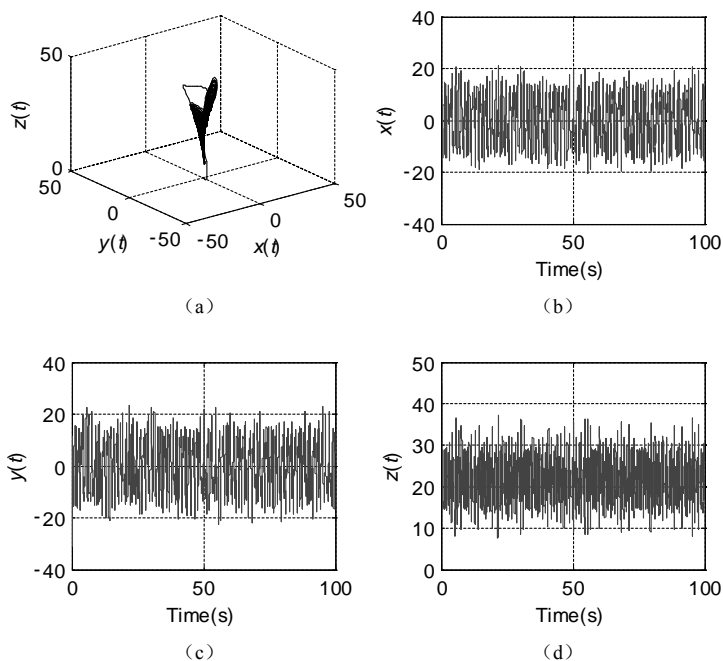
下面在 MATLAB 中进行数值仿真以验证本节设计的分数阶滑模控制律的有效性。分数阶统一混沌系统具有 3 个平衡点, 分别为

$$E_1 = (0, 0, 0)$$

$$E_2 = \left(\sqrt{(\alpha+8)(9-2\alpha)}, \sqrt{(\alpha+8)(9-2\alpha)}, 27-6\alpha \right)$$

$$E_3 = \left(-\sqrt{(\alpha+8)(9-2\alpha)}, -\sqrt{(\alpha+8)(9-2\alpha)}, 27-6\alpha \right)$$

分数阶统一混沌系统的数值仿真中, 分别取分数阶导数的阶次为 $q_1 = 0.93$, $q_2 = 0.94$, $q_3 = 0.95$, 初值取为 $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (-1, -2, 1)$ 。当 $\alpha = 0.5$ 时, 系统混沌特性如图 4-1 所示, 当 $\alpha = 1$ 时, 系统混沌特性如图 4-2 所示。

图 4-1 $\alpha = 0.5$ 时分数阶统一混沌系统 (4-1) 的混沌特性图 4-2 $\alpha = 1$ 时分数阶统一混沌系统 (4-1) 的混沌特性

标称系统的数值仿真中，驱动系统的初值选为 $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (-1, -2, 1)$ ，响应系统的初值选为 $(y_1(0), y_2(0), y_3(0)) = (4, -4, 4)$ ，分数阶滑模面中的参数取 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 4$ 。控制律中的增益取 $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ 。当 $\alpha = 0.5$ 时，在控制律作用下的同步效果如图 4-3~图 4-5 所示。当 $\alpha = 1$ 时，同步效果如图 4-6~图 4-8 所示。

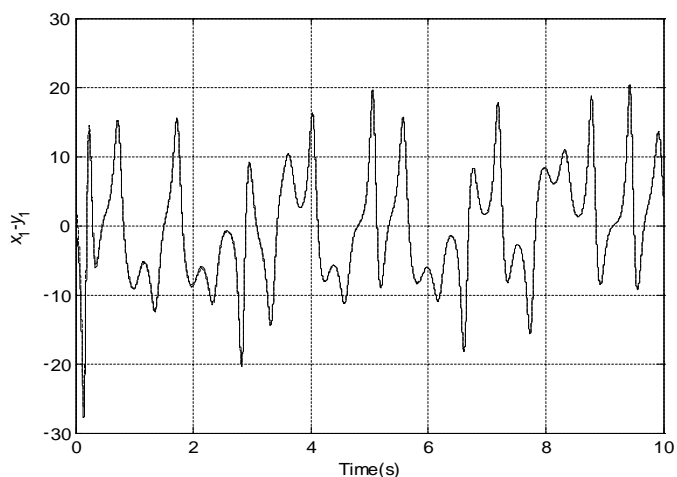


图 4-3 (a) $\alpha=1$ 分数阶统一混沌系统的同步曲线。其中，实线表示驱动系统 (4-2) 状态变量 $x_1(t)$ 的变化曲线，虚线表示响应系统 (4-3) 状态变量 $y_1(t)$ 的变化曲线

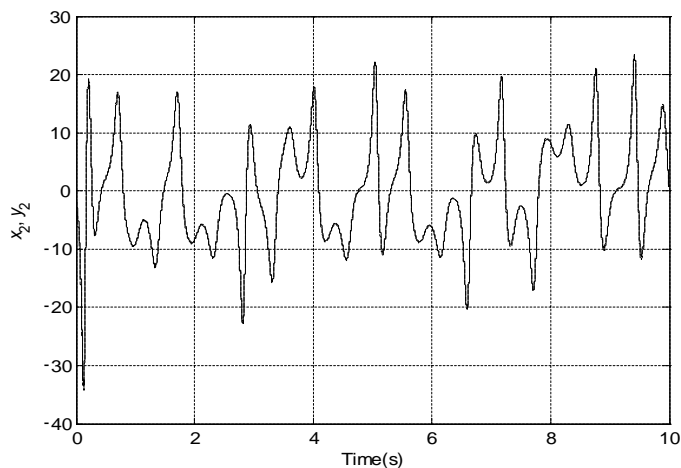


图 4-3 (b) $\alpha=1$ 分数阶统一混沌系统的同步曲线。其中，实线表示驱动系统 (4-2) 状态变量 $x_2(t)$ 的变化曲线，虚线表示响应系统 (4-3) 状态变量 $y_2(t)$ 的变化曲线

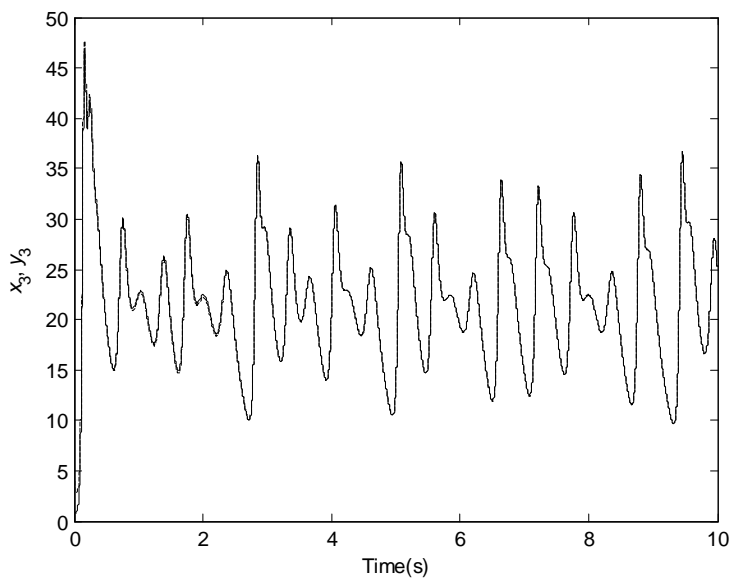


图 4-3 (c) $\alpha=1$ 分数阶统一混沌系统的同步曲线。其中，实线表示驱动系统 (4-2) 状态变量 $x_3(t)$ 的变化曲线，虚线表示响应系统 (4-3) 状态变量 $y_3(t)$ 的变化曲线

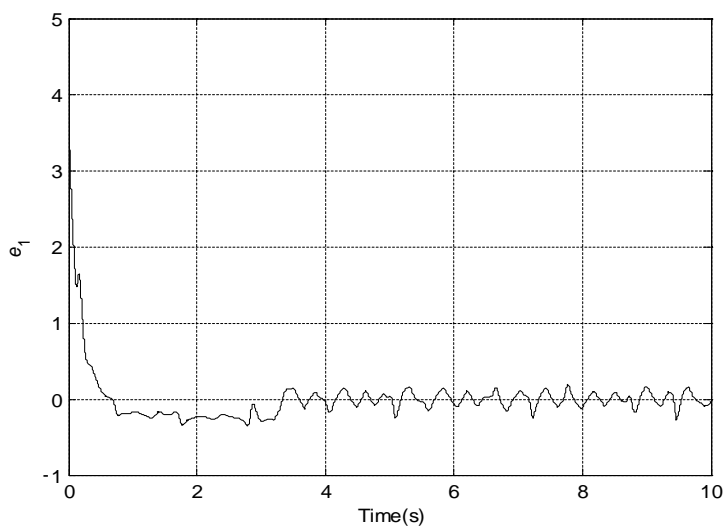


图 4-4 (a) $\alpha=1$ 响应系统 (4-3) 与驱动系统 (4-2) 的同步误差 e_1 变化曲线

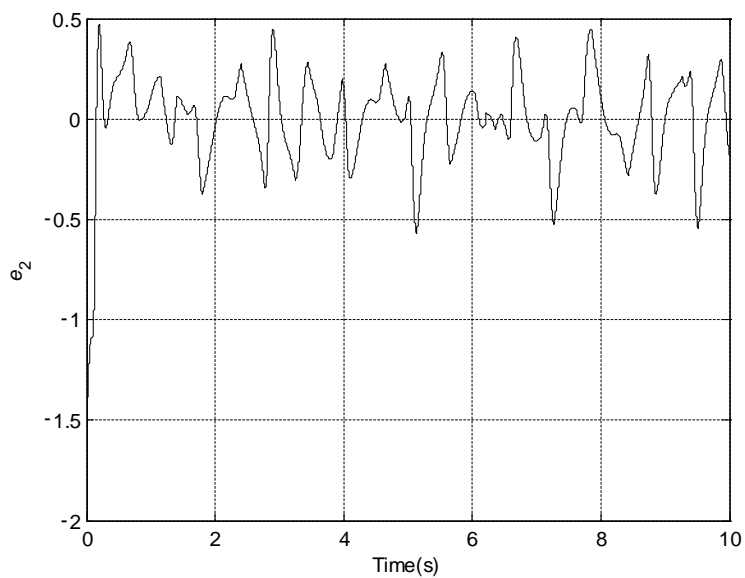


图 4-4 (b) $\alpha=1$ 响应系统 (4-3) 与驱动系统 (4-2) 的同步误差 e_2 变化曲线

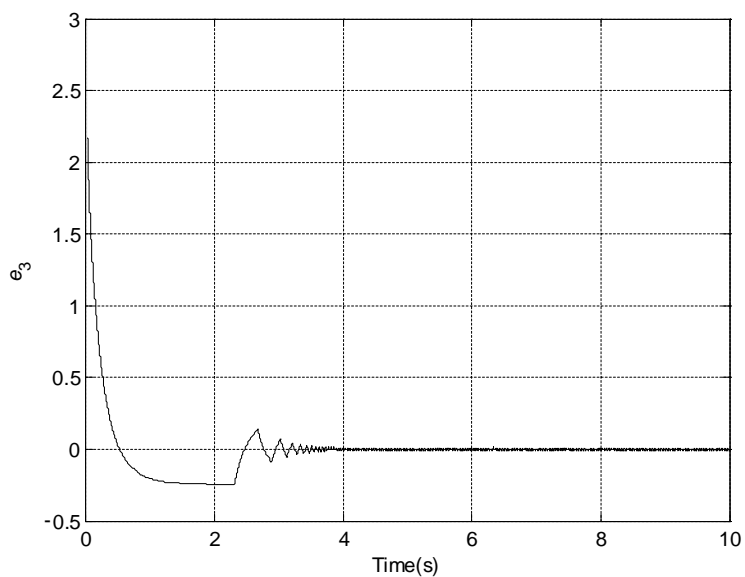
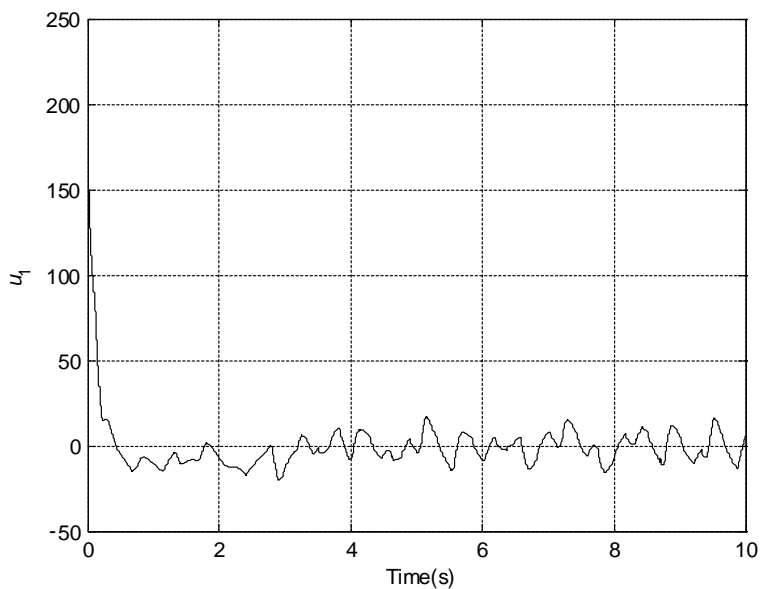
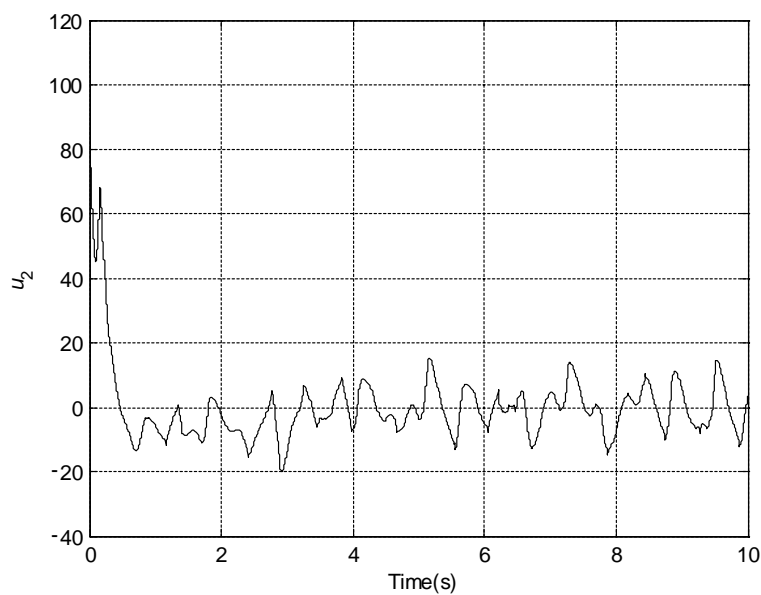


图 4-4 (c) $\alpha=1$ 响应系统 (4-3) 与驱动系统 (4-2) 的同步误差 e_3 变化曲线

图 4-5 (a) $\alpha=1$ 控制输入 u_1 的变化曲线图 4-5 (b) $\alpha=1$ 控制输入 u_2 的变化曲线

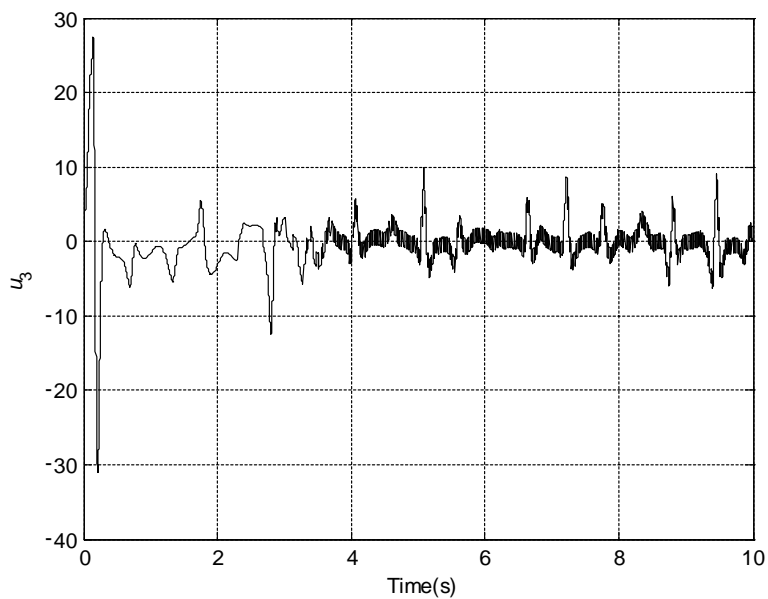


图 4-5 (c) $\alpha=1$ 控制输入 u_3 的变化曲线

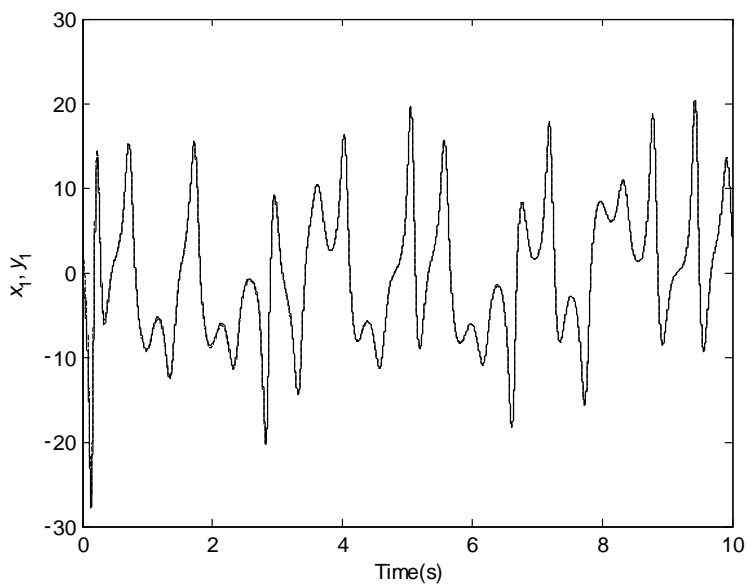


图 4-6 (a) $\alpha=0.5$ 分数阶统一混沌系统的同步曲线。其中，实线表示驱动系统 (4-2) 状态变量 $x_1(t)$ 的变化曲线，虚线表示响应系统 (4-3) 状态变量 $y_1(t)$ 的变化曲线

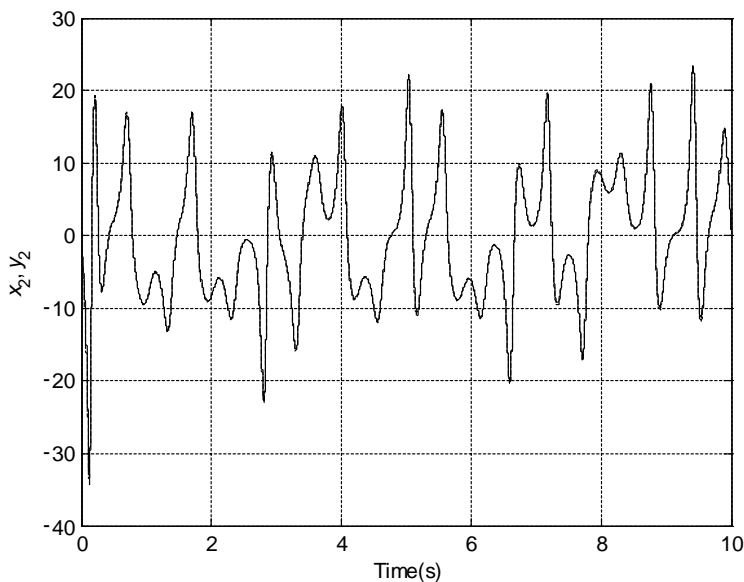


图 4-6 (b) $\alpha=0.5$ 分数阶统一混沌系统的同步曲线。其中，实线表示驱动系统 (4-2) 状态变量 $x_2(t)$ 的变化曲线，虚线表示响应系统 (4-3) 状态变量 $y_2(t)$ 的变化曲线

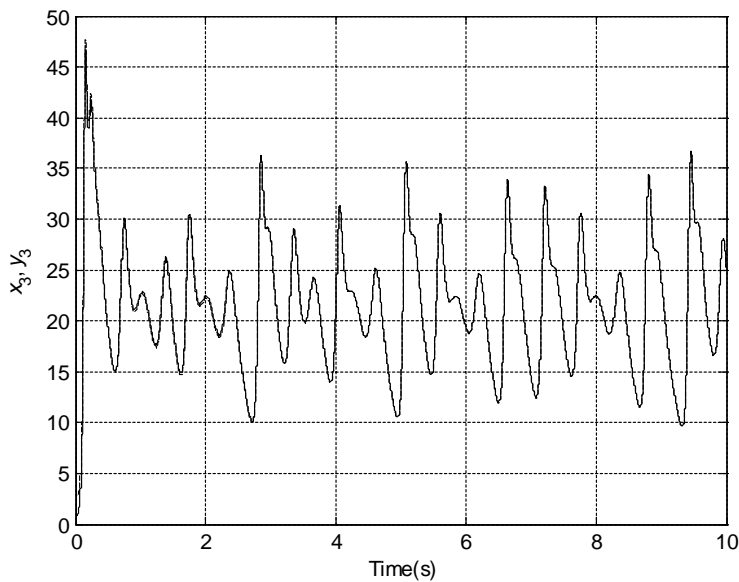


图 4-6 (c) $\alpha=0.5$ 分数阶统一混沌系统的同步曲线。其中，实线表示驱动系统 (4-2) 状态变量 $x_3(t)$ 的变化曲线，虚线表示响应系统 (4-3) 状态变量 $y_3(t)$ 的变化曲线

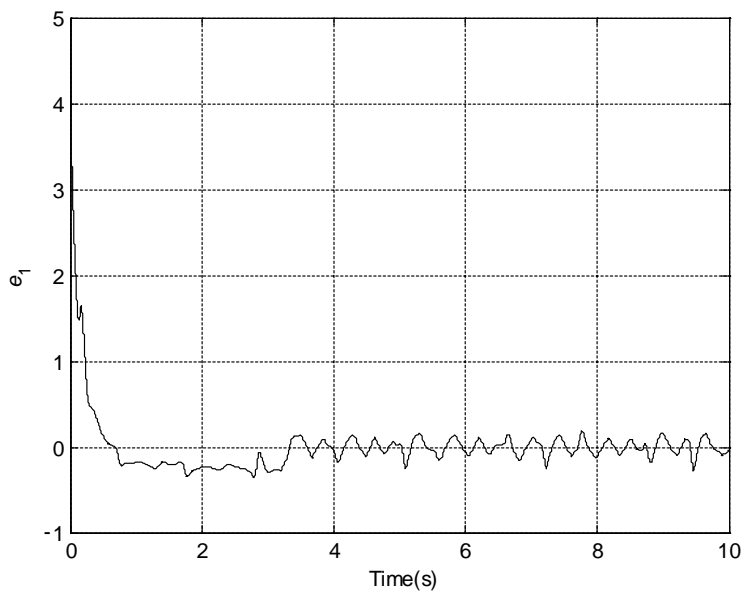


图 4-7 (a) $\alpha=0.5$ 响应系统 (4-3) 与驱动系统 (4-2) 的同步误差 e_1 变化曲线

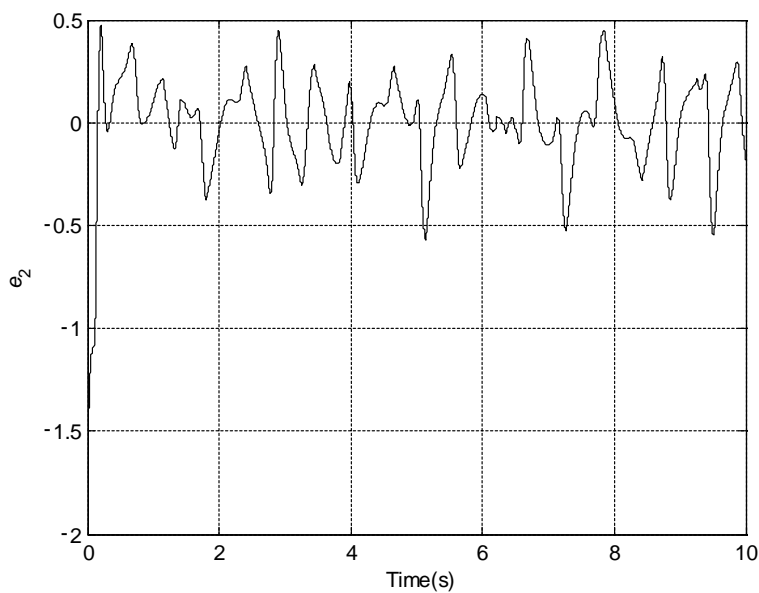
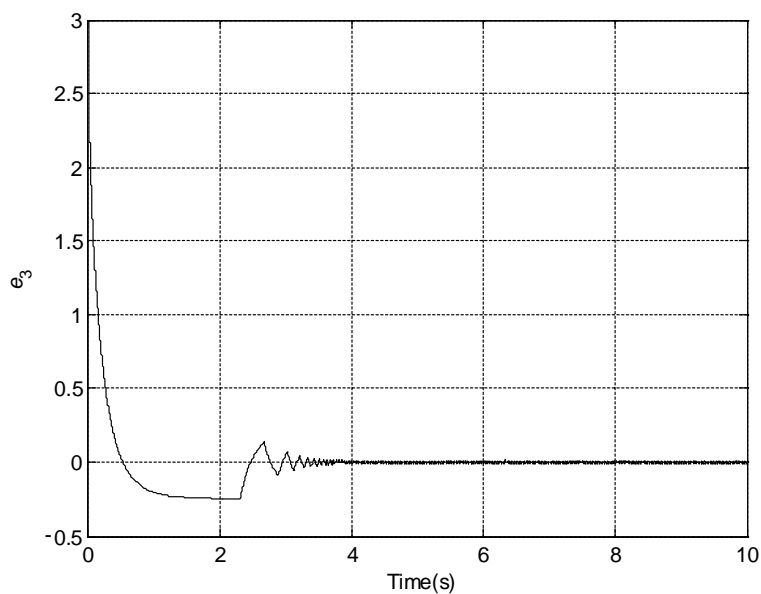
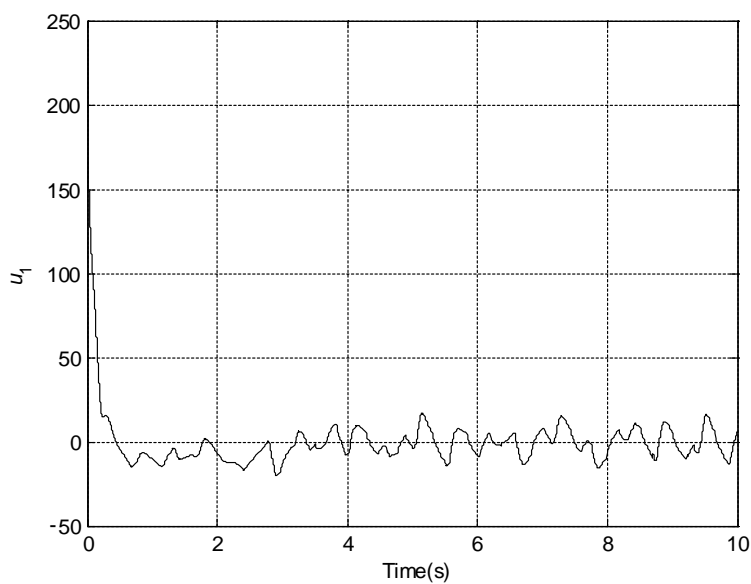


图 4-7 (b) $\alpha=0.5$ 响应系统 (4-3) 与驱动系统 (4-2) 的同步误差 e_2 变化曲线

图 4-7 (c) $\alpha = 0.5$ 响应系统 (4-3) 与驱动系统 (4-2) 的同步误差 e_3 变化曲线图 4-8 (a) $\alpha = 0.5$ 控制输入 u_1 的变化曲线

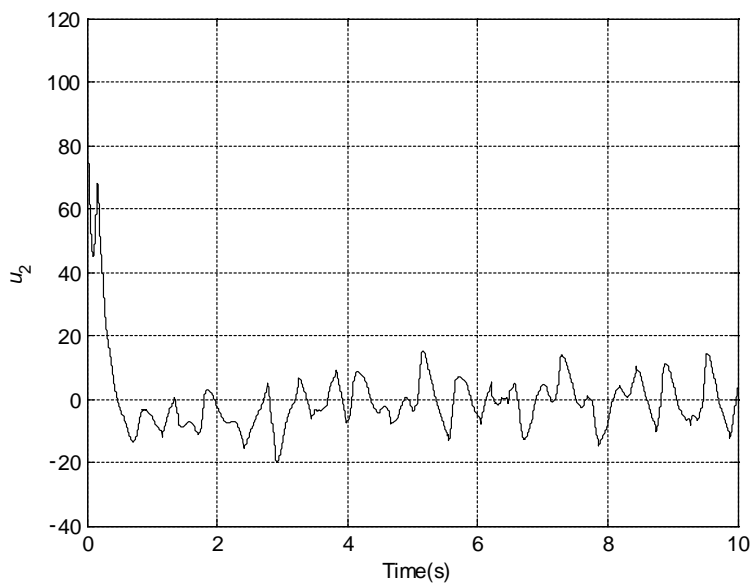


图 4-8 (b) $\alpha=0.5$ 控制输入 u_2 的变化曲线

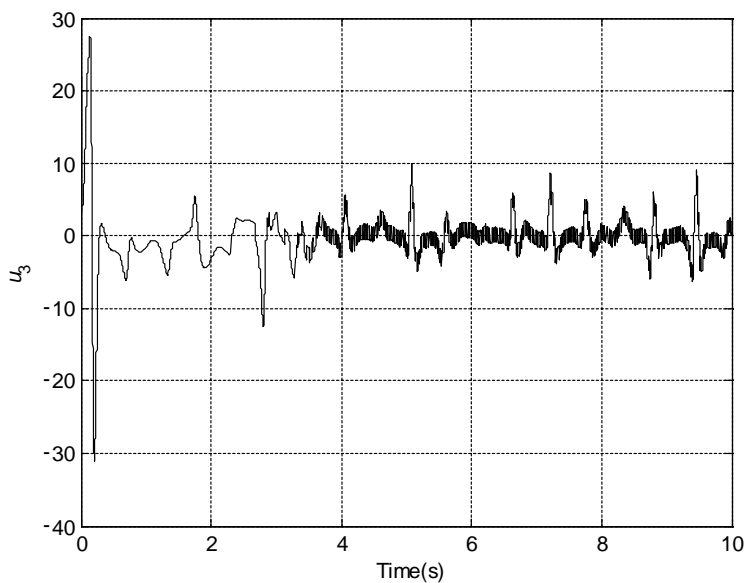


图 4-8 (c) $\alpha=0.5$ 控制输入 u_3 的变化曲线

$\alpha=1$ 时，仿真主程序为 SynUnifiedChaos1.m:

```
function [T,E]=SynUnifiedChaos1(parameters, orders, TSim, E0)
h=0.0005;
n=round(TSim/h);
q1=orders(1); q2=orders(2); q3=orders(3);
lamda1=parameters(1); k1=parameters(2);
lamda2=parameters(3); k2=parameters(4);
lamda3=parameters(5); k3=parameters(6);
% binomial coefficients calculation:
cp1=1; cp2=1; cp3=1;
for j=1:n
    c1(j)=(1-(1+q1)/j)*cp1;
    c2(j)=(1-(1+q2)/j)*cp2;
    c3(j)=(1-(1+q3)/j)*cp3;
    cp1=c1(j); cp2=c2(j); cp3=c3(j);
end
% initial conditions setting:
s1(1)=E0(1); s2(1)=E0(2); s3(1)=E0(3); x1(1)=E0(4); x2(1)=E0(5);
x3(1)=E0(6);
y1(1)=E0(7); y2(1)=E0(8); y3(1)=E0(9); u1(1)=E0(10); u2(1)=E0(11);
u3(1)=E0(12);
a=1;
% calculation of phase portraits /numerical solution/:
for i=2:n
    s1(i)=1/gamma(1-q1)*h^(1-q1)*memos(y1-x1,i-1)+lamda1*h*memos(
(y1-x1,i);
    s2(i)=1/gamma(1-q2)*h^(1-q2)*memos(y2-x2,i-1)+lamda2*h*memos(
(y2-x2,i);
    s3(i)=1/gamma(1-q3)*h^(1-q3)*memos(y3-x3,i-1)+lamda3*h*memos(
(y3-x3,i);
    x1(i)=(25*a+10)*(x2(i-1)-x1(i-1))*h^q1- memo(x1, c1, i);
    x2(i)=((28-35*a)*x1(i)-x1(i)*x3(i-1)+(29*a-1)*x2(i-1))*h^q2-
memo(x2, c2, i);
    x3(i)=(x1(i)*x2(i)-1/3*(a+8)*x3(i-1))*h^q3- memo(x3, c3, i);
    y1(i)=((lamda1-25*a-10)*x1(i)+(25*a+10)*x2(i)-lamda1*y1(i-1)-
k1*sign(s1(i)))*h^q1- memo(y1, c1, i);
    y2(i)=((28-35*a)*x1(i)+(lamda2+29*a-1)*x2(i)-x1(i)*x3(i)-
```

运行程序如下：

[illegible]

[illegible]

```

figure(3);
subplot(3,1,1);
plot(t,y(:,10),'k');
xlabel('Time(sec)');
ylabel('{u}_{1}')
grid on;

subplot(3,1,2);
plot(t,y(:,11),'k');
xlabel('Time(sec)');
ylabel('{u}_{2}')
grid on;

subplot(3,1,3);
plot(t,y(:,12),'k');
xlabel('Time(sec)');
ylabel('{u}_{3}')
grid on;

```

在不确定系统的数值仿真中，驱动系统（4-2）的初值选为

$$(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (-1, -2, 1)$$

响应系统（4-21）的初值选为

$$(y_1(0), y_2(0), y_3(0)) = (4, -4, 4)$$

分数阶滑模面中的参数取 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 20$ 。控制律中的增益取 $k_1 = k_2 = k_3 = 0.5$ ，自适应律中的参数取为 $\mu_1 = \gamma_1 = \mu_2 = \gamma_2 = \mu_3 = \gamma_3 = 0.1$ 。

假设系统的不确定性与外部扰动分别为 $\Delta f_1 = 0$ ， $d_1 = -3\cos(\pi(t-0.1))$ ， $\Delta f_2 = -0.6\sin(2(y_1 - x_1))$ ， $d_2 = 5\sin(t)$ ， $\Delta f_3 = 2\cos(t-0.1)$ 。

当 $\alpha = 0.5$ 时，在控制律与自适应律的作用下的同步效果如图 4-9 和图 4-10 所示。当 $\alpha = 1$ 时，同步效果如图 4-11 和图 4-12。

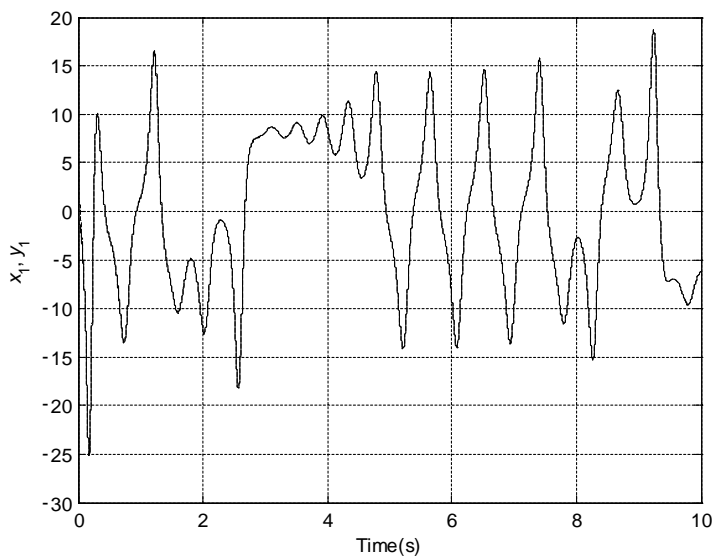


图 4-9 (a) $\alpha=0.5$ 时不确定响应系统 (4-21) 与驱动系统 (4-2) 的同步曲线。
其中，实线表示驱动系统 (4-2) 状态变量 $x_1(t)$ 的变化曲线，虚线表示
响应系统 (4-21) 状态变量 $y_1(t)$ 的变化曲线

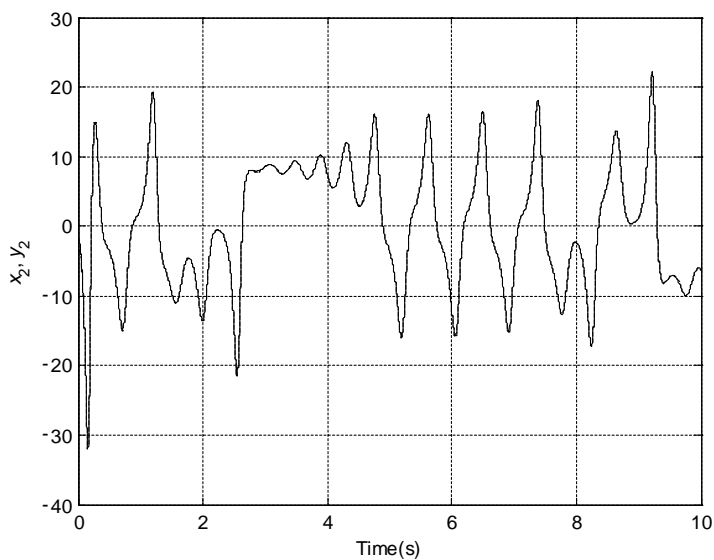


图 4-9 (b) $\alpha=0.5$ 时不确定响应系统 (4-21) 与驱动系统 (4-2) 的同步曲线。
其中，实线表示驱动系统 (4-2) 状态变量 $x_2(t)$ 的变化曲线，虚线表示
响应系统 (4-21) 状态变量 $y_2(t)$ 的变化曲线

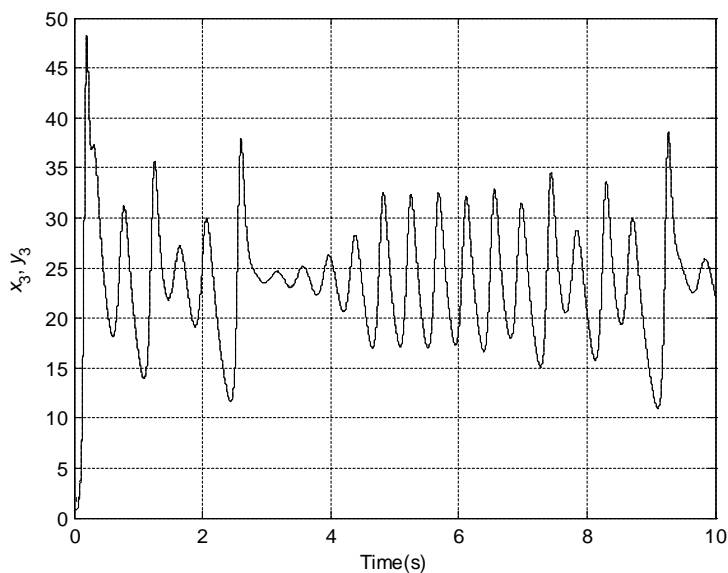


图 4-9 (c) $\alpha=0.5$ 时不确定响应系统 (4-21) 与驱动系统 (4-2) 的同步曲线。
其中, 实线表示驱动系统 (4-2) 状态变量 $x_3(t)$ 的变化曲线, 虚线表示
响应系统 (4-21) 状态变量 $y_3(t)$ 的变化曲线

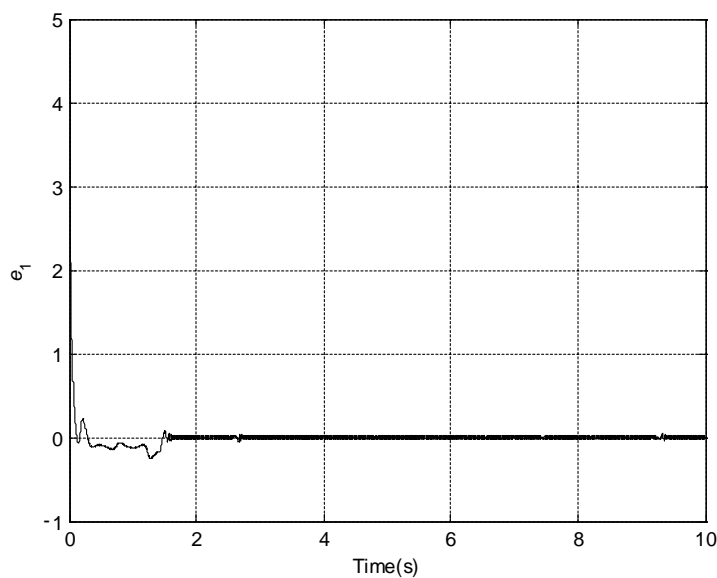


图 4-10 (a) $\alpha=0.5$ 时不确定响应系统 (4-21) 与驱动系统 (4-2) 的
同步误差 e_1 变化曲线

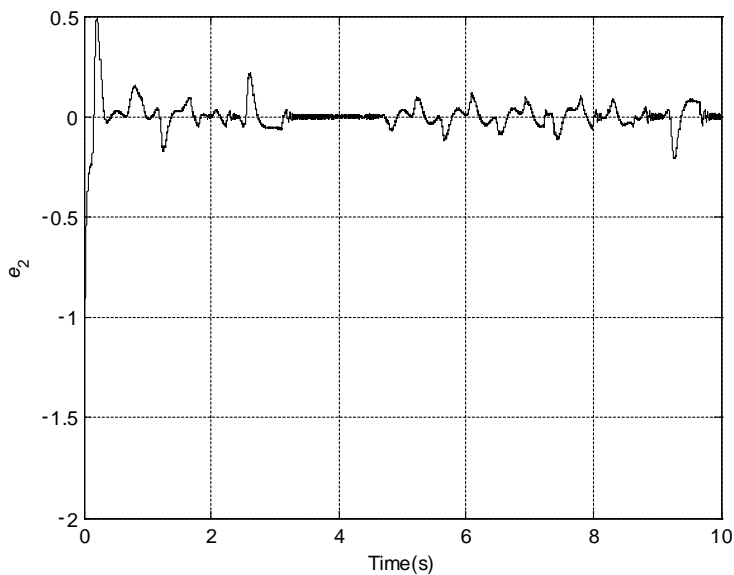


图 4-10 (b) $\alpha=0.5$ 时不确定响应系统 (4-21) 与驱动系统 (4-2) 的同步误差 e_2 变化曲线

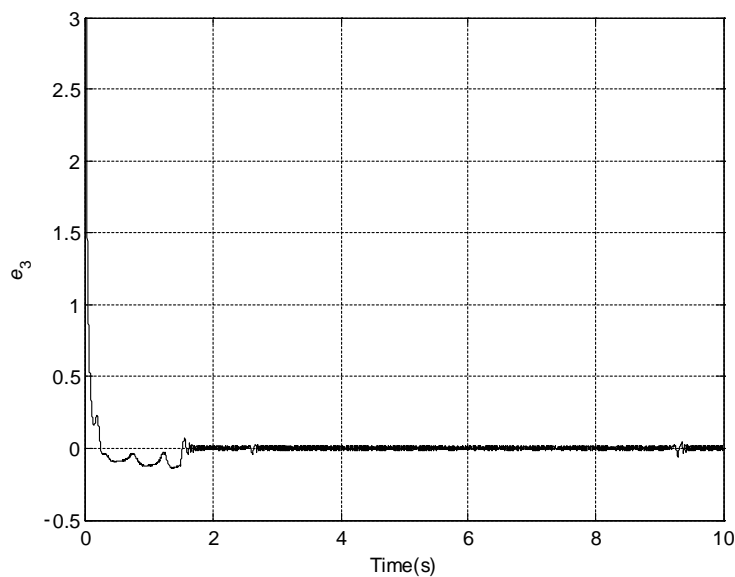


图 4-10 (c) $\alpha=0.5$ 时不确定响应系统 (4-21) 与驱动系统 (4-2) 的同步误差 e_3 变化曲线

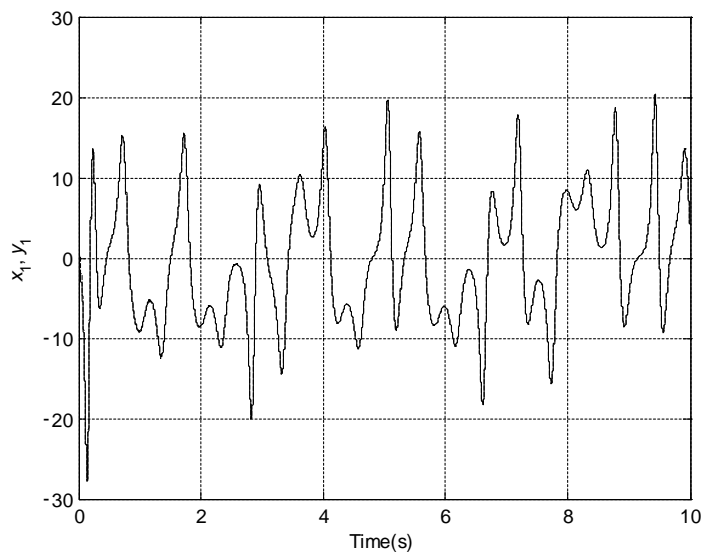


图 4-11 (a) $\alpha=1$ 时不确定响应系统 (4-21) 与驱动系统 (4-2) 的同步曲线。
其中, 实线表示驱动系统 (4-2) 状态变量 $x_1(t)$ 的变化曲线, 虚线表示
响应系统 (4-21) 状态变量 $y_1(t)$ 的变化曲线

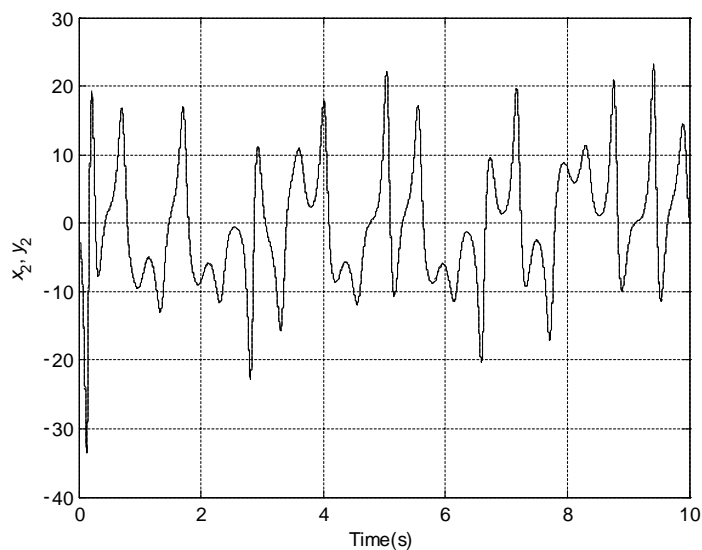


图 4-11 (b) $\alpha=1$ 时不确定响应系统 (4-21) 与驱动系统 (4-2) 的同步曲线。
其中, 实线表示驱动系统 (4-2) 状态变量 $x_2(t)$ 的变化曲线, 虚线表示
响应系统 (4-21) 状态变量 $y_2(t)$ 的变化曲线

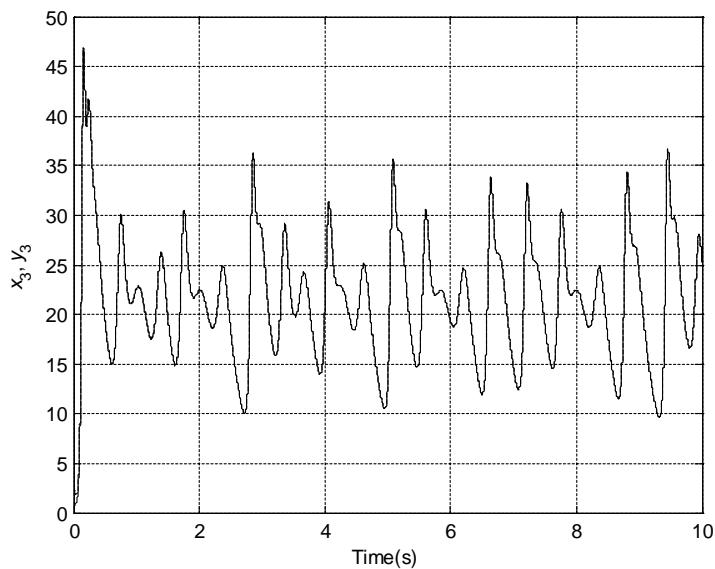


图 4-11 (c) $\alpha=1$ 时不确定响应系统 (4-21) 与驱动系统 (4-2) 的同步曲线。
其中, 实线表示驱动系统 (4-2) 状态变量 $x_3(t)$ 的变化曲线, 虚线表示
响应系统 (4-21) 状态变量 $y_3(t)$ 的变化曲线

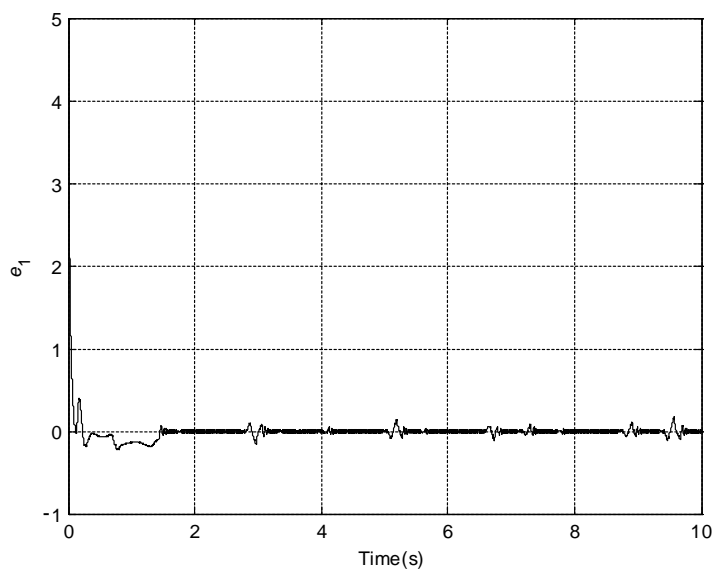


图 4-12 (a) $\alpha=1$ 时不确定响应系统 (4-21) 与驱动系统 (4-2) 的
同步误差 e_1 变化曲线

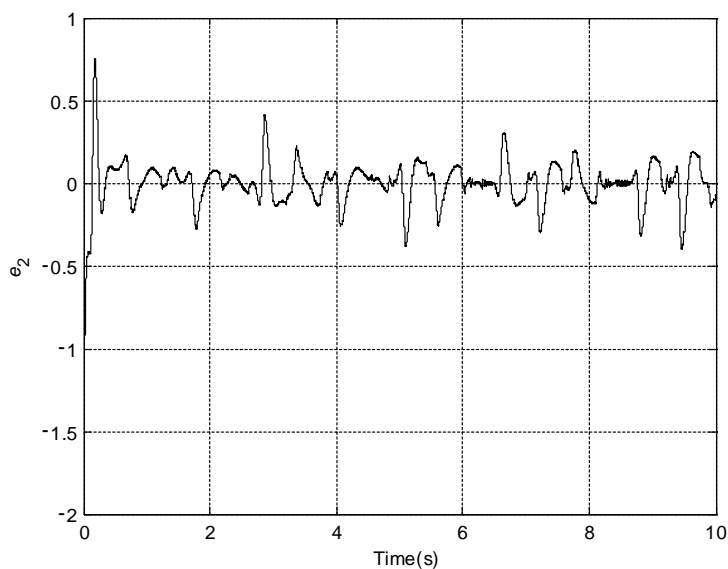


图 4-12 (b) $\alpha=1$ 时不确定响应系统 (4-21) 与驱动系统 (4-2) 的同步误差 e_2 变化曲线

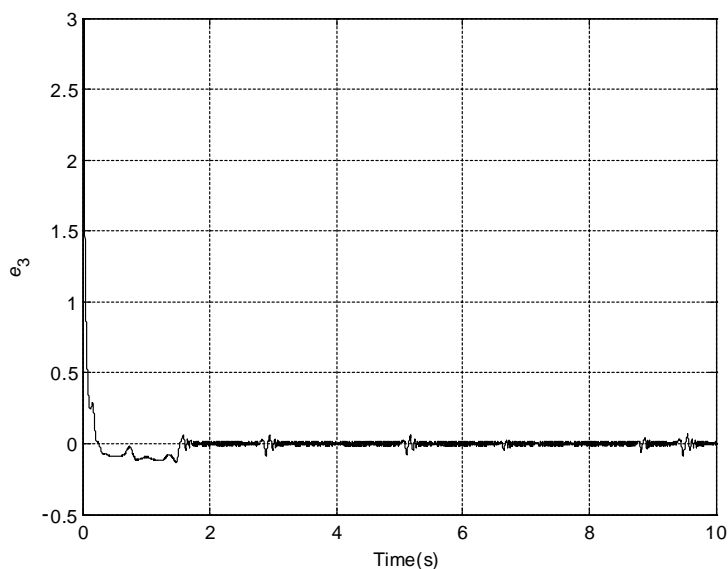


图 4-12 (c) $\alpha=1$ 时不确定响应系统 (4-21) 与驱动系统 (4-2) 的同步误差 e_3 变化曲线

$\alpha = 0.5$ 时, 仿真主程序 SynUnifiedChaos2.m 如下:

```
function [T,E]=SynUnifiedChaos2(parameters, orders, TSim, E0)
h=0.0005;
n=round(TSim/h);
q1=orders(1); q2=orders(2); q3=orders(3);
lamda1=parameters(1); k1=parameters(2);
lamda2=parameters(3); k2=parameters(4);
lamda3=parameters(5); k3=parameters(6);

% binomial coefficients calculation:
cp1=1; cp2=1; cp3=1;
for j=1:n
    c1(j)=(1-(1+q1)/j)*cp1;
    c2(j)=(1-(1+q2)/j)*cp2;
    c3(j)=(1-(1+q3)/j)*cp3;
    cp1=c1(j); cp2=c2(j); cp3=c3(j);
end
% initial conditions setting:
s1(1)=E0(1); s2(1)=E0(2); s3(1)=E0(3); x1(1)=E0(4); x2(1)=E0(5);
x3(1)=E0(6);
y1(1)=E0(7); y2(1)=E0(8); y3(1)=E0(9); rho1=E0(10); theta1=E0(11);
rho2=E0(12); theta2=E0(13); rho3=E0(14); theta3=E0(15);
a=0.5;
% calculation of phase portraits /numerical solution/:
for i=2:n
    s1(i)=1/gamma(1-q1)*h^(1-q1)*memos(y1-x1,i-1)+lamda1*h*memos(
(y1-x1,i);
    s2(i)=1/gamma(1-q2)*h^(1-q2)*memos(y2-x2,i-1)+lamda2*h*memos(
(y2-x2,i);
    s3(i)=1/gamma(1-q3)*h^(1-q3)*memos(y3-x3,i-1)+lamda3*h*memos(
(y3-x3,i);
    x1(i)=(25*a+10)*(x2(i-1)-x1(i-1))*h^q1- memo(x1, c1, i);
    x2(i)=((28-35*a)*x1(i)-x1(i)*x3(i-1)+(29*a-1)*x2(i-1))*h^q2-
memo(x2, c2, i);
    x3(i)=(x1(i)*x2(i)-1/3*(a+8)*x3(i-1))*h^q3- memo(x3, c3, i);

    y1(i)=(-3*cos(pi*(i-0.1)))+(lamda1-25*a-10)*x1(i)+(25*a+10)*
```

```

x2(i)-lamda1*y1(i-1)-(rho1(i-1)+theta1(i-1)+k1)*sign(s1(i)))*h^q1-
memo(y1, c1, i);

y2(i)=(5*sin(i)-0.6*sin(2*(y1(i)-x1(i)))+(28-35*a)*x1(i)+
(lamda2+29*a-1)*x2(i)-x1(i)*x3(i)-lamda2*y2(i-1)-(rho2(i-1)+theta2
(i-1)+k2)*sign(s2(i)))*h^q2- memo(y2, c2, i);

y3(i)=(2*cos(i-0.1)+x1(i)*x2(i)+(lamda3-1/3*(a+8))*x3(i)-
lamda3*y3(i-1)-(rho3(i-1)+theta3(i-1)+k3)*sign(s3(i)))*h^q3- memo(y3,
c3, i);

rho1(i)=0.1*h*memos(abs(s1),i);
theta1(i)=0.1*h*memos(abs(s1),i);
rho2(i)=0.1*h*memos(abs(s2),i);
theta2(i)=0.1*h*memos(abs(s2),i);
rho3(i)=0.1*h*memos(abs(s3),i);
theta3(i)=0.1*h*memos(abs(s3),i);
end
for j=1:n
    E(j,1)=s1(j);
    E(j,2)=s2(j);
    E(j,3)=s3(j);
    E(j,4)=x1(j);
    E(j,5)=x2(j);
    E(j,6)=x3(j);
    E(j,7)=y1(j);
    E(j,8)=y2(j);
    E(j,9)=y3(j);
    E(j,10)=rho1(j);
    E(j,11)=theta1(j);
    E(j,12)=rho2(j);
    E(j,13)=theta2(j);
    E(j,14)=rho3(j);
    E(j,15)=theta3(j);

end
T=h:h:TSim;
%
```

运行程序如下：

```
lamda1=20;
lamda2=20;
lamda3=20;
k1=.5;
k2=.5;
k3=.5 ;

[t, y]=SynUnifiedChaos2([lamda1 k1 lamda2 k2 lamda3 k3], [0.93 0.94
0.95], 10, [5 -2 3 -1 -2 1 4 -4 4 .5 .5 .2 .2 .3 .3]);
subplot(3,1,1);
plot(t,y(:,4),'b',t,y(:,7),'r');
xlabel('Time(sec)');
ylabel('x1,y1')
title('a')

subplot(3,1,2);
plot(t,y(:,5),'b',t,y(:,8),'r');
xlabel('Time(sec)');
ylabel('x2,y2')
title('b')
subplot(3,1,3);
plot(t,y(:,6),'b',t,y(:,9),'r');
xlabel('Time(sec)');
ylabel('x3,y3')
title('c')
```

4.5 本章小结

本章针对分数阶统一混沌系统之间的同步问题，设计了滑模控制律及自适应律。首先，给出驱动系统的状态方程与响应系统的状态方程，介绍了同步问题的一般提法；其次，针对分数阶统一混沌系统的标称模型设计了分数阶滑模面及滑模控制律；再次，进一步针对系统存在不确定性的情形设计了滑模控制律，并利用自适应技术估计不确定参数；最后，对设计的滑模控制律进行数值仿真，验证了该设计方法的有效性。

第 5 章

分数阶统一混沌系统控制与同步：滑模方法（II）

本章继续介绍分数阶统一混沌系统的控制与同步问题，采用与上一章不同的滑模控制设计方法。5.1 节将针对分数阶统一混沌系统设计滑模控制律，只需一个控制律即可实现镇定，5.2 节将采用与 5.1 节相同的设计思路，研究分数阶统一混沌系统之间的同步问题，5.3 节进行数值仿真，以验证设计方法的有效性。

5.1 分数阶统一混沌系统的镇定

本节考虑分数阶统一混沌系统（5-1）的镇定问题。将控制律作用于混沌系统（5-1）的第二个状态方程中，则受控系统的数学模型为

$$\begin{cases} D^{q_1} x = (25\alpha + 10)y - x \\ D^{q_2} y = (28 - 35\alpha)x - xz + (29\alpha - 1)y + u_1 \\ D^{q_3} z = xy - \frac{8 + \alpha}{3}z \end{cases} \quad (5-1)$$

采用分数阶滑模控制技术进行控制律设计，分为如下3步：

步骤1 设计分数阶滑模面 $s(t)$

$$s(t) = D^{q_2-1}y(t) \quad (5-2)$$

求一阶导数，得

$$\dot{s}(t) = D^{q_2}y = (28 - 35\alpha)x - xz + (29\alpha - 1)y + u$$

步骤2 设计 Lyapunov 函数

$$V = \frac{1}{2}s^2 \quad (5-3)$$

沿滑模面式 (5-2) 求 Lyapunov 函数式 (5-3) 的一阶导数，得

$$\dot{V}(t) = s\dot{s} = s[(28 - 35\alpha)x - xz + (29\alpha - 1)y + u_1] \quad (5-4)$$

选择控制律

$$u_1 = -(28 - 35\alpha)x + xz - (29\alpha - 1)y - k_1s - k_2\text{sign}(s) \quad (5-5)$$

将控制律式 (5-5) 代入式 (5-4)，得

$$\dot{V}(t) = -k_1s^2 - k_2|s| = -k_1V - k_2\sqrt{V} \quad (5-6)$$

根据 Lyapunov 稳定性定理， $V(t)$ 在有限时间内收敛到零，从而分数阶滑模面在有限时间内收敛到零。

步骤3 为了分析第二个状态变量 $y(t)$ ，根据滑模面 (5-2)，求得

$$y(t) = D^{1-q_2}s = \frac{1}{\Gamma(q_2)} \int_0^t \frac{s(\tau)}{(t-\tau)^{1-q_2}} d\tau \quad (5-7)$$

因为滑模面 s 在有限时间内趋于零，所以，当 $t \rightarrow \infty$ 时， $y \rightarrow 0$ 。

步骤4 同样，根据系统 (5-1) 的第一个状态方程，得

$$\begin{aligned} x(t) = & x(0)E_q(-(25\alpha + 10)t^{q_1}) + \\ & (25\alpha + 10) \int_0^t y(t-\tau) \frac{d}{dt} E_q(-(25\alpha + 10)\tau^{q_1}) d\tau \end{aligned}$$

因为 $t \rightarrow \infty$ 时 $y \rightarrow 0$ ，所以， $t \rightarrow \infty$ 时 $x(t) \rightarrow 0$ 。

步骤 5 根据系统 (5-1) 的第三个状态方程，得

$$z(t) = z(0)E_{q_3}\left(-\frac{8+\alpha}{3}t^{q_3}\right) + \int_0^t x(t-\tau)y(t-\tau)\frac{d}{d\tau}E_{q_3}\left(-\frac{8+\alpha}{3}\tau^{q_3}\right)d\tau$$

因为 $t \rightarrow \infty$ 时， $x(t) \rightarrow 0$ $y(t) \rightarrow 0$ ，所以， $t \rightarrow \infty$ 时 $z(t) \rightarrow 0$ 。

通过上述讨论，得到如下结论：

定理 5.1 在分数阶滑模控制律 (5-5) 的作用下，分数阶统一混沌系统 (5-2) 的 3 个状态变量渐近趋于零。

5.2 分数阶统一混沌系统的同步

本节考虑分数阶统一混沌系统之间的同步问题。定义驱动系统如下：

$$\begin{cases} D^{q_1}x_m = (25\alpha + 10)(y_m - x_m) \\ D^{q_2}y_m = (28 - 35\alpha)x_m - x_m z_m + (29\alpha - 1)y_m \\ D^{q_3}z_m = x_m y_m - \frac{8+\alpha}{3}z_m \end{cases} \quad (5-8)$$

定义响应系统如下：

$$\begin{cases} D^{q_1}x_s = (25\alpha + 10)(y_s - x_s) \\ D^{q_2}y_s = (28 - 35\alpha)x_s - x_s z_s + (29\alpha - 1)y_s \\ D^{q_3}z_s = x_s y_s - \frac{8+\alpha}{3}z_s \end{cases} \quad (5-9)$$

定义响应系统 (5-9) 与驱动系统 (5-8) 之间的状态误差如下：

$$e_1 = x_s - x_m$$

$$e_2 = y_s - y_m$$

$$e_3 = z_s - z_m$$

则误差系统的状态方程为

$$\begin{cases} D^{q_1} e_1 = (25\alpha + 10)(e_2 - e_1) \\ D^{q_2} e_2 = -x_s e_3 - z_m e_1 + (28 - 35\alpha)e_1 + (29\alpha - 1)e_2 + u_2 \\ D^{q_3} e_3 = x_s e_2 + y_m e_1 - \frac{8 + \alpha}{3} e_3 \end{cases} \quad (5-10)$$

根据与上一节同样的设计步骤，设计分数阶滑模面为

$$s(t) = D^{q_2-1} e_2(t) \quad (5-11)$$

设计 Lyapunov 函数

$$V(t) = \frac{1}{2} s^2$$

设计控制律

$$u_2 = x_s e_3 + z_m e_1 - (28 - 35\alpha)e_1 - (29\alpha - 1)e_2 - k_3 s - k_4 \text{sign}(s) \quad (5-11)$$

对 $V(t)$ 求导并将式 (5-11) 代入，得

$$\dot{V}(t) = -k_3 s^2 - k_4 |s| = -k_3 V - k_4 \sqrt{V}$$

因此， s 在有限时间内趋于零，且当 $t \rightarrow \infty$ 时 $(e_1, e_2, e_3) \rightarrow 0$ 。从而在控制律 (5-11) 的作用下实现了响应系统 (5-9) 与驱动系统 (5-8) 之间的同步。

5.3 数值仿真

分数阶统一混沌系统 (5-1) 的镇定问题中，导数阶次分别选取为 $q_1 = 0.9$ ， $q_2 = 0.95$ ， $q_3 = 0.91$ ，初值条件选定为 $x(0) = -9$ ， $y(0) = -5$ ， $z(0) = 14$ 。控制律中的增益选取为 $k_1 = 10$ ， $k_2 = 0.1$ 。仿真效果如图 5-1 和图 5-2 所示。

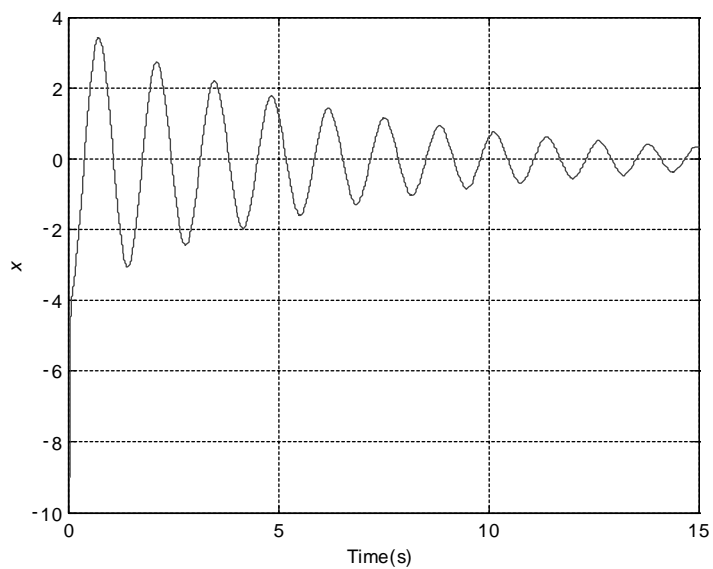


图 5-1 (a) $\alpha = 0.8$ 分数阶统一混沌系统的滑模控制效果: x 状态曲线

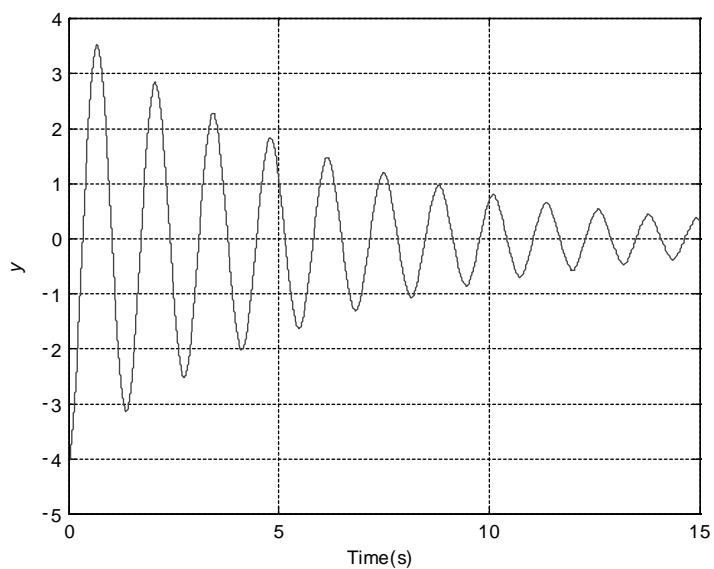


图 5-1 (b) $\alpha = 0.8$ 分数阶统一混沌系统的滑模控制效果: y 状态曲线

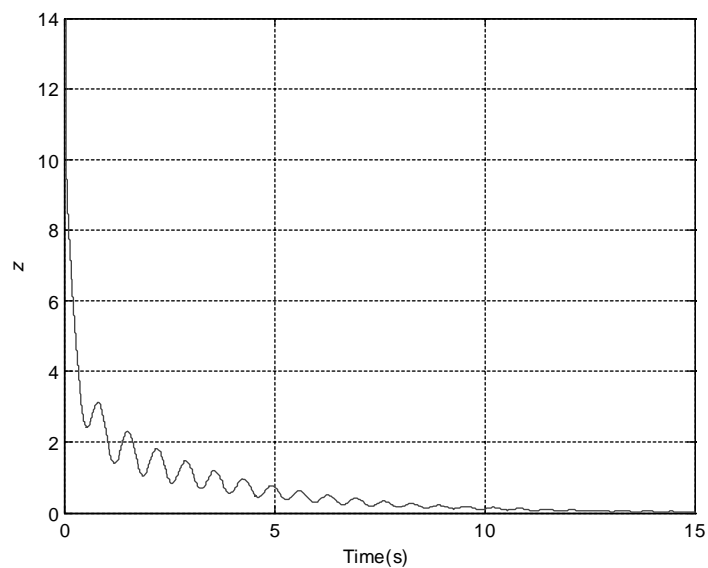


图 5-1 (c) $\alpha = 0.8$ 分数阶统一混沌系统的滑模控制效果： z 状态曲线

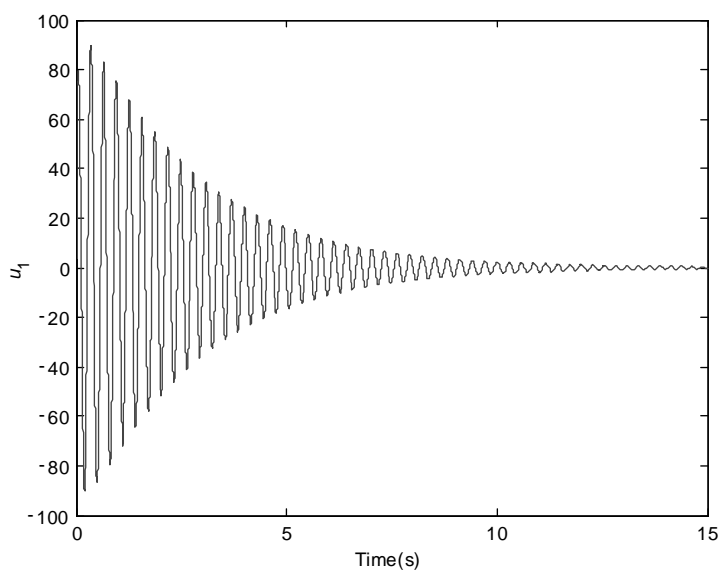


图 5-1 (d) $\alpha = 0.8$ 分数阶统一混沌系统的滑模控制效果：控制律 u_1 曲线

主程序为 Chaos_control.m:

```
function [T,E]=Chaos_control(parameters,orders, TSim, E0)
a=0.8;
h=0.001;
n=round(TSim/h);
k1=parameters(1); k2=parameters(2);
q1=orders(1); q2=orders(2); q3=orders(3);
% binomial coefficients calculation:
cp1=1; cp2=1; cp3=1;
for j=1:n
    c1(j)=(1-(1+q1)/j)*cp1;
    c2(j)=(1-(1+q2)/j)*cp2;
    c3(j)=(1-(1+q3)/j)*cp3;
    cp1=c1(j); cp2=c2(j); cp3=c3(j);
end
% initial conditions setting:
x1(1)=E0(1);x2(1)=E0(2); x3(1)=E0(3);s(1)=E0(4);u(1)=E0(5);
% calculation of phase portraits /numerical solution/:
for i=2:n
    x1(i)=(25*a+10)*(x2(i-1)-x1(i-1))*h^q1- memo(x1, c1, i);
    x2(i)=(-k1*s(i-1)-k2*sign(s(i-1)))*h^q2- memo(x2, c2, i);
    x3(i)=(x1(i)*x2(i)-1/3*(a+8)*x3(i-1))*h^q3- memo(x3, c3, i);
    s(i)=1/gamma(1-q2)*h^(1-q2)*memos(x2,i-1);
    u(i)=-((28-35*a)*x1(i)+x1(i)*x3(i)-(29*a-1)*x2(i)-k1*s(i)-k2*
sign(s(i)));
end
for j=1:n
    E(j,1)=x1(j);
    E(j,2)=x2(j);
    E(j,3)=x3(j);
    E(j,4)=s(j);
    E(j,5)=u(j);
end
T=h:h:TSim;
```

运行程序如下:

```
k1=10;
k2=0.1;
[t, y]=Chaos_control([k1 k2],[0.9 0.95 0.91],15, [-9 -5 14 -5
5*k1+k2-15]);

figure(1);
subplot(2,2,1);
plot(t,y(:,1));
xlabel('Time(sec)');
ylabel('x');
title('a')

subplot(2,2,2);
plot(t,y(:,2));
xlabel('Time(sec)');
ylabel('y');
title('b')
subplot(2,2,3);
plot(t,y(:,3));
xlabel('Time(sec)');
ylabel('z');
title('c')

subplot(2,2,4);
plot(t,y(:,5));
xlabel('Time(sec)');
ylabel('u')
title('d')
```

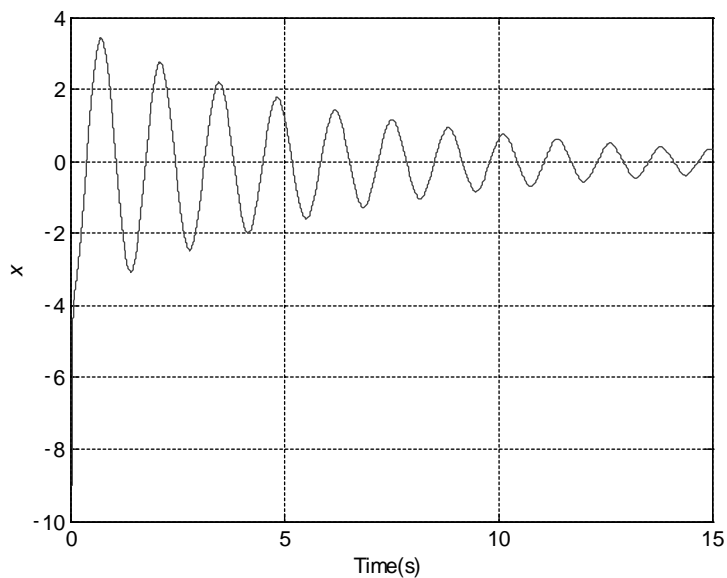


图 5-2 (a) $\alpha=1$ 分数阶统一混沌系统的滑模控制效果: x 状态曲线

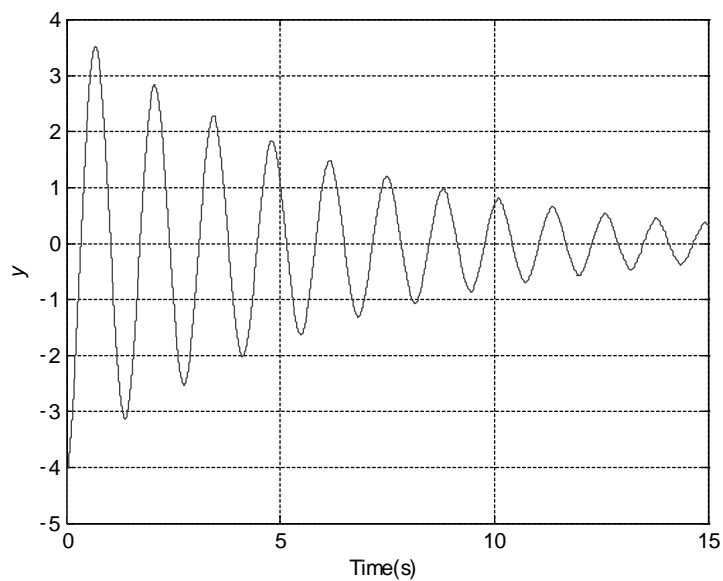
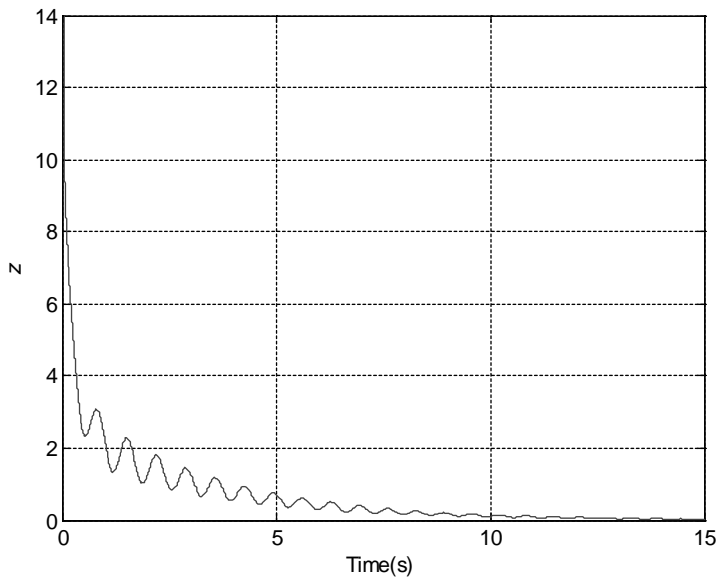
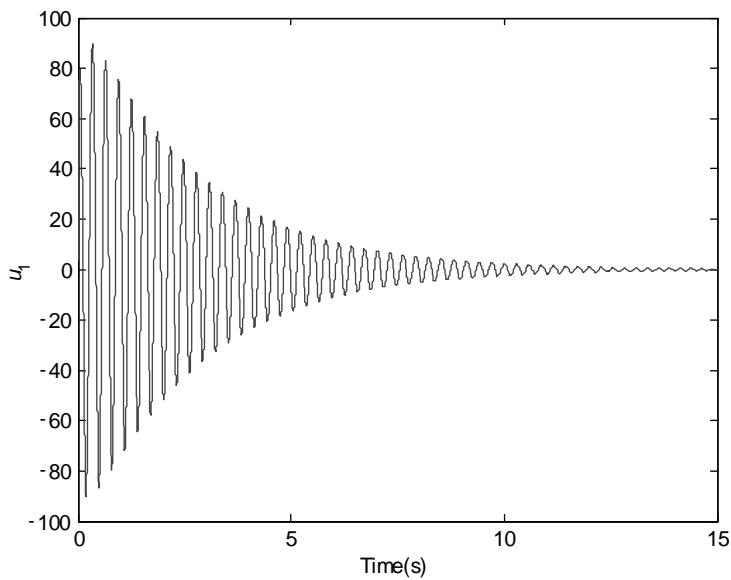


图 5-2 (b) $\alpha=1$ 分数阶统一混沌系统的滑模控制效果: y 状态曲线

图 5-2 (c) $\alpha=1$ 分数阶统一混沌系统的滑模控制效果： z 状态曲线图 5-2 (d) $\alpha=1$ 分数阶统一混沌系统的滑模控制效果：控制律 u_1 曲线

分数阶统一混沌系统的同步问题中，驱动系统（5-8）的初值设定为

$$x_m(0) = -9, y_m(0) = -5, z_m(0) = 14$$

响应系统（5-9）的初值设定为

$$x_s(0) = 0, y_s(0) = 0, z_s(0) = 0$$

分数阶导数的阶次分别取值为

$$q_1 = 0.9, q_2 = 0.95, q_3 = 0.91$$

控制律（5-11）中的增益取为

$$k_3 = 10, k_4 = 0.1$$

系统中的参数分别取

$$\alpha = 0.5, \alpha = 0.8$$

仿真效果如图 5-3 和图 5-4 所示。

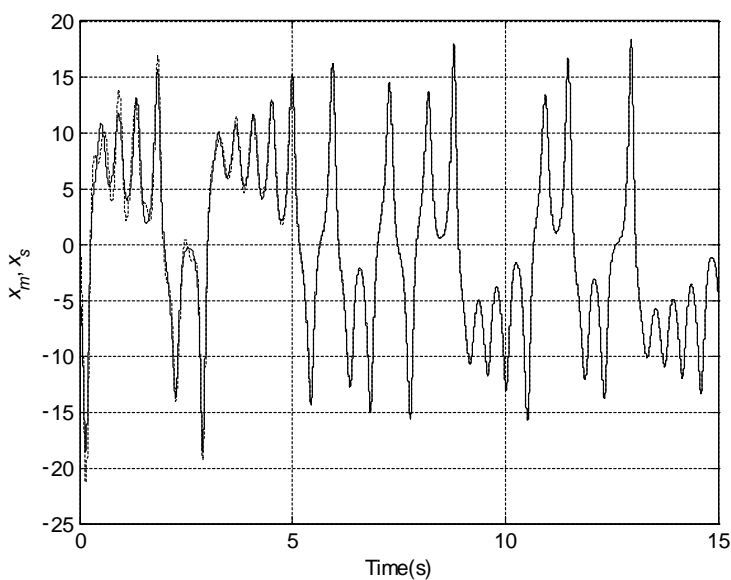


图 5-3 (a) $\alpha=0.5$ 分数阶统一混沌系统的同步曲线。其中，实线表示驱动系统（5-8）状态变量 $x_m(t)$ 的变化曲线，点线表示响应系统（5-9）状态变量 $x_s(t)$ 的变化曲线

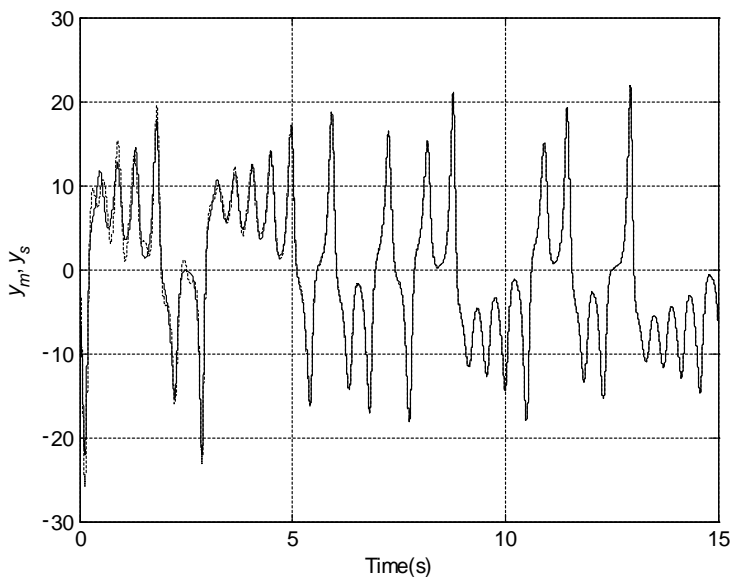


图 5-3 (b) $\alpha=0.5$ 分数阶统一混沌系统的同步曲线。其中，实线表示驱动系统 (5-8) 状态变量 $y_m(t)$ 的变化曲线，点线表示响应系统 (5-9) 状态变量 $y_s(t)$ 的变化曲线

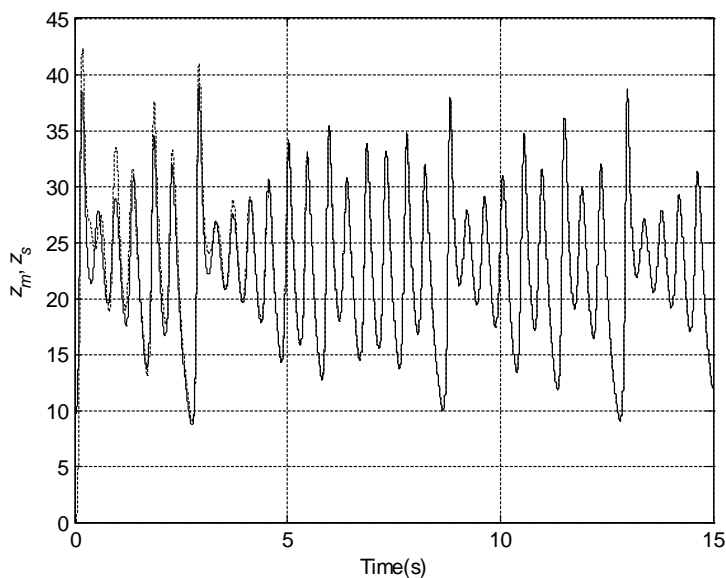


图 5-3 (c) $\alpha=0.5$ 分数阶统一混沌系统的同步曲线。其中，实线表示驱动系统 (5-8) 状态变量 $z_m(t)$ 的变化曲线，虚线表示响应系统 (5-9) 状态变量 $z_s(t)$ 的变化曲线

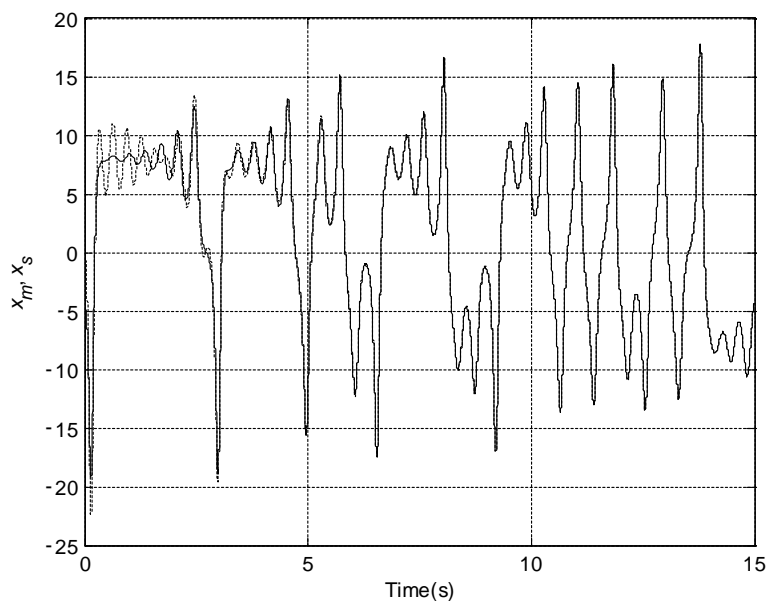


图 5-4 (a) $\alpha=1$ 分数阶统一混沌系统的同步曲线。其中，实线表示驱动系统 (5-8) 状态变量 $x_m(t)$ 的变化曲线，点线表示响应系统 (5-9) 状态变量 $x_s(t)$ 的变化曲线

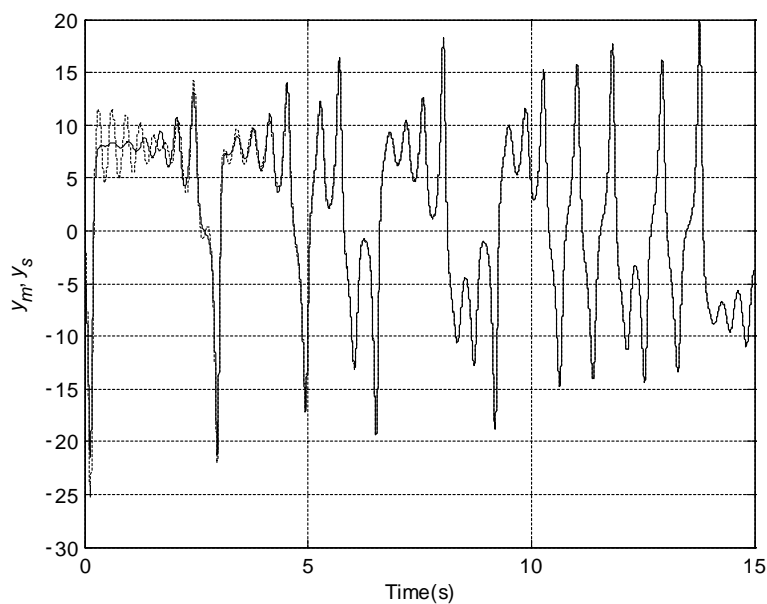


图 5-4 (b) $\alpha=1$ 分数阶统一混沌系统的同步曲线。其中，实线表示驱动系统 (5-8) 状态变量 $y_m(t)$ 的变化曲线，虚线表示响应系统 (5-9) 状态变量 $y_s(t)$ 的变化曲线

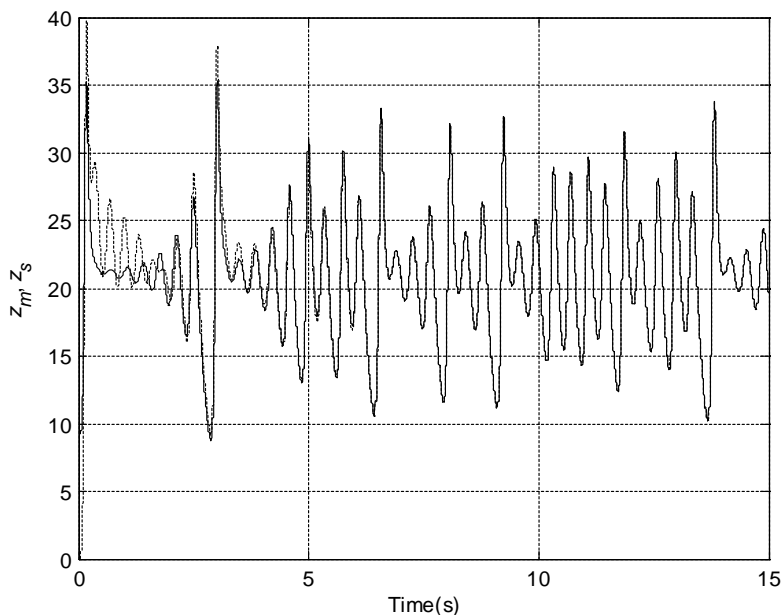


图 5-4 (c) $\alpha=1$ 分数阶统一混沌系统的同步曲线。其中，实线表示驱动系统 (5-8) 状态变量 $z_m(t)$ 的变化曲线，虚线表示响应系统 (5-9) 状态变量 $z_s(t)$ 的变化曲线

$\alpha=1$ 时，仿真程序如下：

```
function [T,E]=Chaos_syn(parameters,orders, TSim, E0)
a=1;
h=0.001;
n=round(TSim/h);
k1=parameters(1); k2=parameters(2);
q1=orders(1); q2=orders(2); q3=orders(3);

% binomial coefficients calculation:
cp1=1; cp2=1; cp3=1;
for j=1:n
    c1(j)=(1-(1+q1)/j)*cp1;
    c2(j)=(1-(1+q2)/j)*cp2;
    c3(j)=(1-(1+q3)/j)*cp3;
    cp1=c1(j); cp2=c2(j); cp3=c3(j);
end
% initial conditions setting:
xm(1)=E0(1); ym(1)=E0(2); zm(1)=E0(3);
```

```

xs(1)=E0(4);ys(1)=E0(5); zs(1)=E0(6);
s(1)=E0(7);u(1)=E0(8);

% calculation of phase portraits /numerical solution/:
for i=2:n
    xm(i)=(25*a+10)*(ym(i-1)-xm(i-1))*h^q1- memo(xm, c1, i);
    ym(i)=((28-35*a)*xm(i)-xm(i)*zm(i-1)+(29*a-1)*ym(i-1))*h^q2-
memo(ym, c2, i);
    zm(i)=(xm(i)*ym(i)-1/3*(a+8)*zm(i-1))*h^q3- memo(zm, c3, i);
    xs(i)=(25*a+10)*(ys(i-1)-xs(i-1))*h^q1- memo(xs, c1, i);
    ys(i)=((28-35*a)*xs(i)-xs(i)*zs(i-1)+(29*a-1)*ys(i-1)+u(i-
1))*h^q2- memo(ys, c2, i);
    zs(i)=(xs(i)*ys(i)-1/3*(a+8)*zs(i-1))*h^q3- memo(zs, c3, i);
    s(i)=1/gamma(1-q2)*h^(1-q2)*memos(ys-ym,i-1);
    u(i)=xs(i)*(zs(i)-zm(i))+zm(i)*(xs(i)-xm(i))-(28-35*a)*
(xs(i)-xm(i))-(29*a-1)*(ys(i)-ym(i))-k1*s(i)-k2*sign(s(i));
end
for j=1:n
    E(j,1)=xm(j);
    E(j,2)=ym(j);
    E(j,3)=zm(j);
    E(j,4)=xs(j);
    E(j,5)=ys(j);
    E(j,6)=zs(j);
    E(j,7)=s(j);
    E(j,8)=u(j);

end
T=h:h:TSim;
%
```

运行程序如下:

```

k1=10;
k2=0.1;
[t, y]=Chaos_syn([k1 k2],[0.9 0.95 0.91],15, [-9 -5 14 0 0 0 5
15-5*k1-k2]);
```

```

% %%%%%%%%%%%%%% synchronization %%%%%%%%%%%%%%
figure(1);
subplot(3,1,1);
plot(t,y(:,4),'k:',t,y(:,1),'k-');
xlabel('Time(sec)');
ylabel('{x}_{m}, {x}_{s}')

grid on;
subplot(3,1,2);
plot(t,y(:,5),'k:',t,y(:,2),'k-');
xlabel('Time(sec)');
ylabel('{y}_{m}, {y}_{s}')

grid on;
subplot(3,1,3);
plot(t,y(:,6),'k:',t,y(:,3),'k-');
xlabel('Time(sec)');
ylabel('{z}_{m}, {z}_{s}')

grid on;

% %%%%%%%%%%%%%% e,u %%%%%%%%%%%%%%
figure(2);
subplot(2,2,1);
plot(t,y(:,4)-y(:,1));
xlabel('Time(sec)');
ylabel('e1');
title('a')

subplot(2,2,2);
plot(t,y(:,5)-y(:,2));
xlabel('Time(sec)');
ylabel('e2');
title('b')

subplot(2,2,3);
plot(t,y(:,6)-y(:,3));
xlabel('Time(sec)');
ylabel('e3');

```

```
title('c')

subplot(2,2,4);
plot(t,y(:,8));
xlabel('Time(sec)');
ylabel('u(t)')
title('d')
```

5.4 本章小结

本章研究了分数阶统一混沌系统的控制与同步问题，与上一章不同的是，该设计方法只需将一个控制律作用于混沌系统的第二个转台方程中，即可实现控制或同步问题。首先，针对分数阶统一混沌系统设计了滑模控制律，然后，采用与5.1节相同的设计思路，研究分数阶统一混沌系统之间的同步问题，最后，用数值仿真验证了设计方法的有效性。

第 6 章

分数阶统一混沌系统控制与同步设计：主动控制方法

本章将继续研究分数阶统一混沌系统的控制与同步问题，采用的方法是主动控制方法。该方法的灵活性在于，在同步设计中，驱动系统及响应系统中的参数可以是不一致的。本章内容安排如下：6.1 节利用主动控制方法的设计思想，针对分数阶统一混沌系统的镇定问题设计反馈控制律；6.2 节针对分数阶统一混沌系统的同步问题设计主动控制律；6.3 节通过数值仿真验证设计方法的有效性。

6.1 分数阶统一混沌系统的控制

受控系统的数学模型为

$$\begin{cases} D^{\alpha_1} x_1 = (25\alpha + 10)(x_2 - x_1) + u_1 \\ D^{\alpha_2} x_2 = (28 - 35\alpha)x_1 - x_1x_3 + (29\alpha - 1)x_2 + u_2 \\ D^{\alpha_3} x_3 = x_1x_2 - (8 + \alpha)x_3 / 3 + u_3 \end{cases} \quad (6-1)$$

式中, u_1 、 u_2 及 u_3 为控制输入, 选取

$$\begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = x_1 x_3 + v_2 \\ u_3 = -x_1 x_2 + v_3 \end{cases} \quad (6-2)$$

式中, v_1 、 v_2 及 v_3 为状态变量 x_1 、 x_2 、 x_3 的线性函数。

此时, u_1 、 u_2 、 u_3 的选取方式变为

$$\begin{cases} D^{q_1} x_1 = (25\alpha + 10)(x_2 - x_1) + v_1 \\ D^{q_2} x_2 = (28 - 35\alpha)x_1 + (29\alpha - 1)x_2 + v_2 \\ D^{q_3} x_3 = -(8 + \alpha)x_3 / 3 + v_3 \end{cases} \quad (6-3)$$

为保证系统 (6-3) 的渐近稳定性, 选取 v_1 、 v_2 和 v_3 分别为

$$\begin{cases} v_1 = -k_1 x_1 \\ v_2 = -k_2 x_2 \\ v_3 = 0 \end{cases} \quad (6-4)$$

式中, k_1 、 k_2 为待确定的增益。

此时, 系统 (6-3) 变为

$$\begin{cases} D^{q_1} x_1 = (25\alpha + 10)(x_2 - x_1) - k_1 x_1 \\ D^{q_2} x_2 = (28 - 35\alpha)x_1 + (29\alpha - 1)x_2 - k_2 x_2 \\ D^{q_3} x_3 = -(8 + \alpha)x_3 / 3 \end{cases} \quad (6-5)$$

将闭环系统 (6-5) 记为如下更紧凑的形式:

$$D^q x = Ax \quad (6-6)$$

其中,

$$A = \begin{pmatrix} -25\alpha - 10 - k_1 & 25\alpha + 10 & 0 \\ 28 - 35\alpha & 29\alpha - 1 - k_2 & 0 \\ 0 & 0 & -(\alpha + 8)/3 \end{pmatrix}$$

$$q = (q_1, q_2, q_3)$$

下面将确定合适的增益 k_1 、 k_2 ，使得分数阶闭环系统 (6-6) 的状态渐近趋于零。在分数阶闭环系统 (6-6) 的阶次是同元情况下，将基于引理 1.1 来确定 k_1 和 k_2 ；在分数阶闭环系统 (6-6) 的阶次是异元情况下，将基于引理 1.2 来确定 k_1 和 k_2 。为此，首先计算矩阵 A 的特征多项式：

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda) &= \det(\lambda I - A) \\ &= (\lambda + (\alpha + 8)/3) \times [\lambda^2 + (k_1 + k_2 - 4\alpha + 11)\lambda + 150\alpha^2 + \\ &\quad (-29k_1 + 25k_2 - 615)\alpha + (k_1 + 10)(k_2 + 1) - 280]\end{aligned}\quad (6-7)$$

根据引理 1.1 或引理 1.2，矩阵 A 的特征值为负数时，分数阶线性微分方程 (6-6) 是渐近稳定的。因此，为了简化增益的设计过程，确定 k_1, k_2 的标准是矩阵 A 的特征值为负数。

根据式 (6-7)，得到矩阵 A 的一个特征值为

$$\lambda_1 = -(\alpha + 8)/3 < 0$$

记其余两个特征值分别为 λ_2 和 λ_3 ，为了使得 $\lambda_2 < 0$ 且 $\lambda_3 < 0$ ， λ_2 和 λ_3 满足以下关系：

$$\lambda_2 + \lambda_3 < 0 \text{ 且 } \lambda_2 \lambda_3 > 0$$

根据式 (6-7)，得

$$\begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = -k_1 - k_2 + 4\alpha - 11 \\ \lambda_2 \lambda_3 = f(\alpha) \triangleq 150\alpha^2 + (-29k_1 + 25k_2 - 615)\alpha + (k_1 + 10)(k_2 + 1) - 280 \end{cases}$$

为了确保 $\lambda_2 + \lambda_3 < 0$ ，有

$$k_1 + k_2 > 4\alpha - 11 \quad (6-8)$$

对任意 $\alpha \in [0, 1]$ 成立。

为了确保 $\lambda_2 \lambda_3 > 0$ ，即 $f(\alpha) > 0$ ，对任意 $\alpha \in [0, 1]$ 成立，有

$$\begin{cases} \alpha_0 & 0 \\ f(0) & 0 \end{cases} \quad (6-9)$$

或者

$$\begin{cases} \alpha_0 & 1 \\ f(1) & 0 \end{cases} \quad (6-10)$$

式中, $\alpha_0 = \frac{29k_1 - 25k_2 + 615}{300}$, 为 $f(\alpha)$ 的对称轴。

根据式 (6-8) 和式 (6-9) 得到

$$\begin{cases} k_1 + k_2 & 4\alpha - 11 \\ 29k_1 - 25k_2 & -615 \\ (k_1 + 10)(k_2 + 1) & 280 \end{cases} \quad (6-11)$$

根据式 (6-11), 选取

$$k_1 = 0, k_2 = 27 \quad (6-12)$$

根据式 (6-8) 和式 (6-10) 得到

$$\begin{cases} k_1 + k_2 & 4\alpha - 11 \\ 29k_1 - 25k_2 & -315 \\ k_1k_2 - 28k_1 + 35k_2 & 735 \end{cases} \quad (6-13)$$

根据式 (6-13), 选取

$$k_1 = 10, k_2 = 23$$

此时, 基于主动控制方法设计了 3 个控制律, 使得分数阶统一混沌的状态渐近趋于零。

6.2 分数阶统一混沌系统的同步

本节将研究分数阶统一混沌系统的同步问题。与文献[76]及文献[103]不同的是, 本节中的方法不要求驱动系统及响应系统中的参数是一致的。

将系统 (6-1) 作为驱动系统, 将以下系统作为响应系统:

$$\begin{cases} D^{q_1} y_1 = (25\beta + 10)(y_2 - y_1) + u_1 \\ D^{q_2} y_2 = (28 - 35\beta)y_1 - y_1 y_3 + (29\beta - 1)y_2 + u_2 \\ D^{q_3} y_3 = y_1 y_2 - (8 + \beta)y_3 / 3 + u_3 \end{cases} \quad (6-14)$$

定义响应系统 (6-14) 及驱动系统 (6-1) 之间的状态误差为

$$e_1 = y_1 - x_1, e_2 = y_2 - x_2, e_3 = y_3 - x_3$$

由此, 得到误差系统的动力学方程为

$$\begin{cases} D^{q_1} e_1 = (25\beta + 10)(e_2 - e_1) + 25(\beta - \alpha)(x_2 - x_1) + u_1 \\ D^{q_2} e_2 = (28 - 35\beta)e_1 + (29\beta - 1)e_2 - 35(\beta - \alpha)x_1 + \\ \quad e_1 e_3 - e_1 y_3 - e_3 y_1 + 29(\beta - \alpha)x_2 + u_2 \\ D^{q_3} e_3 = -\frac{\beta + 8}{3}e_3 - \frac{\beta - \alpha}{3}x_3 - e_1 e_2 + e_1 y_2 + e_2 y_1 + u_3 \end{cases} \quad (6-15)$$

很明显, 响应系统 (6-14) 与驱动系统 (6-1) 之间的同步设计问题等价于误差系统 (6-15) 的控制设计问题。因此, 我们的目标转为误差系统 (6-15) 的控制设计, 即 $t \rightarrow \infty$ 时 $e_i \rightarrow 0, i=1,2,3$ 。

根据 6.1 节相同的设计思路, 首先选取控制律为

$$\begin{cases} u_1 = -25(\beta - \alpha)(x_2 - x_1) + v_1 \\ u_2 = 35(\beta - \alpha)x_1 - e_1 e_3 + e_1 y_3 + e_3 y_1 - 29(\beta - \alpha)x_2 + v_2 \\ u_3 = \frac{\beta - \alpha}{3}x_3 + e_1 e_2 - e_1 y_2 - e_2 y_1 + v_3 \end{cases} \quad (6-16)$$

然后选取线性函数为

$$\begin{cases} v_1 = -k_1 e_1 \\ v_2 = -k_2 e_2 \\ v_3 = 0 \end{cases} \quad (6-17)$$

最后, 根据式 (6-16) 和式 (6-17), 误差系统 (6-15) 变为

$$D^q e = \tilde{A}e \quad (6-18)$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -25\alpha - 10 - k_1 & 25\alpha + 10 & 0 \\ 28 - 35\alpha & 29\epsilon - 1 - k_2 & 0 \\ 0 & 0 & -(\alpha + 8)/3 \end{pmatrix}$$

系统 (6-17) 与系统 (6-6) 在本质上是完全相同的系统。因此, 很自然地, 式 (6-12) 或式 (6-14) 可以作为式 (6-15) 或式 (6-17) 的增益。其中, $\alpha \in [0, 1]$, $\beta \in [0, 1]$ 都是任意的。

此时, 基于主动控制方法设计了 3 个控制律, 使得分数阶统一混沌响应系统 (6-14) 与驱动系统 (6-1) 之间完成了同步。

6.3 数值模拟

本节将对前两节设计的分数阶统一混沌系统的主动控制律进行数值模拟, 以验证其有效性。数值模拟中, 分数阶导数的阶次取为 $q_1 = q_2 = q_3 = 0.95$ 。

设定初始条件 $x_1(t) = x_1(0^+) = -1$, $x_2(t) = x_2(0^+) = -2$, $x_3(t) = x_3(0^+) = 1$ 。

图 6-1~图 6-4 显示了在控制律作用下, 分数阶统一混沌系统 (6-1) 在不同的参数 α 取值时的变化曲线。

在分数阶统一混沌系统的同步问题中, 驱动系统 (6-1) 及响应系统 (6-14) 的初始条件分别设定为

$$x_1(t) = x_1(0^+) = -1, \quad x_2(t) = x_2(0^+) = -2, \quad x_3(t) = x_3(0^+) = 1$$

$$y_1(t) = y_1(0^+) = 4, \quad y_2(t) = y_2(0^+) = -4, \quad y_3(t) = y_3(0^+) = 4$$

图 6-5~图 6-10 显示了在控制律作用下, 驱动系统 (6-1) 在不同的参数 α 取值, 以及响应系统 (6-14) 在不同的参数 β 取值时的状态变化曲线。

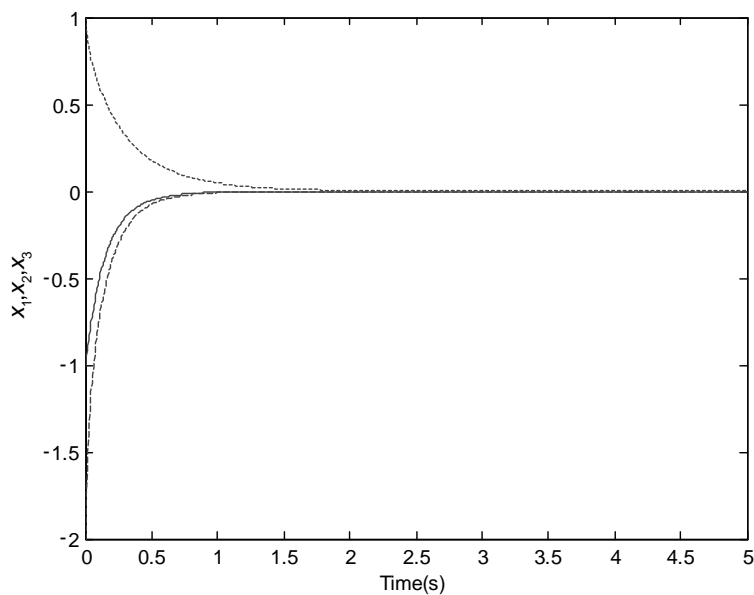


图 6-1 分数阶统一混沌系统的控制响应 $\alpha=0$ ， $k_1=10$ ， $k_2=23$ 。

实线表示 x_1 ，虚线表示 x_2 ，点线表示 x_3

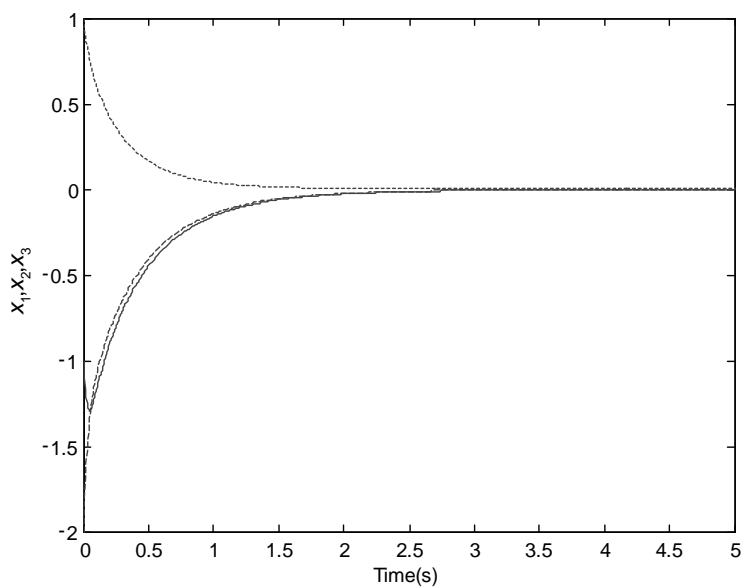


图 6-2 分数阶统一混沌系统的控制响应 $\alpha=0.5$ ， $k_1=0$ ， $k_2=27$ 。

实线表示 x_1 ，虚线表示 x_2 ，点线表示 x_3

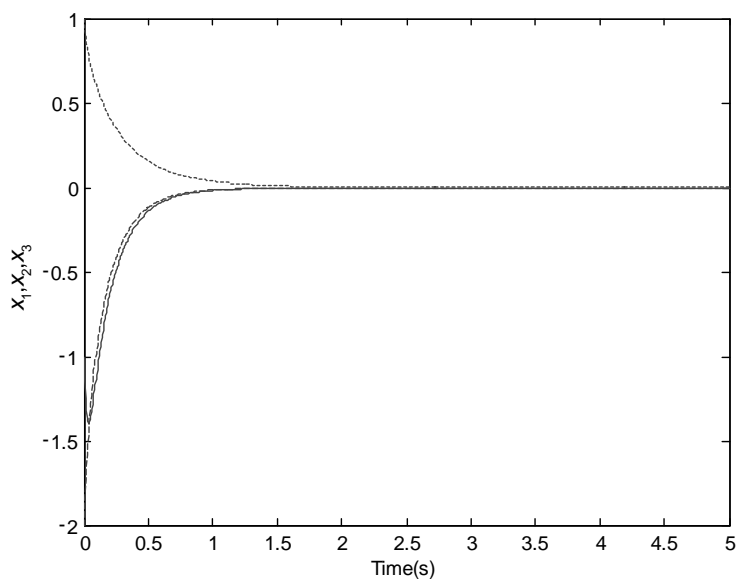


图 6-3 分数阶统一混沌系统的控制响应 $\alpha=0.8$, $k_1=0$, $k_2=27$ 。

实线表示 x_1 , 虚线表示 x_2 , 点线表示 x_3

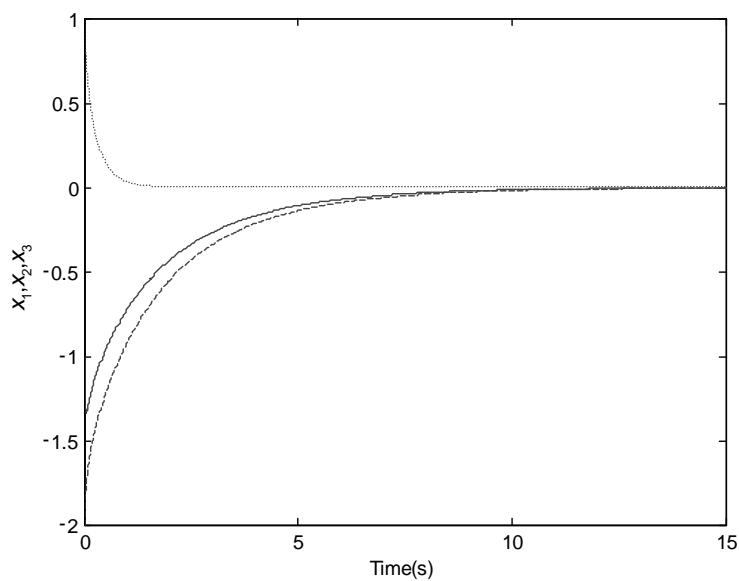


图 6-4 分数阶统一混沌系统的控制响应 $\alpha=1$, $k_1=10$, $k_2=23$ 。

实线表示 x_1 , 虚线表示 x_2 , 点线表示 x_3

$\alpha=1$ 时的主程序如下:

```
function [T,E]=ChaosActiveControlb(orders, TSim, E0)
h=0.005;
n=round(TSim/h);
q1=orders(1); q2=orders(2); q3=orders(3);

% binomial coefficients calculation:
cp1=1; cp2=1; cp3=1;
for j=1:n
    c1(j)=(1-(1+q1)/j)*cp1;
    c2(j)=(1-(1+q2)/j)*cp2;
    c3(j)=(1-(1+q3)/j)*cp3;
    cp1=c1(j); cp2=c2(j); cp3=c3(j);
end
% initial conditions setting:
x1(1)=E0(1);x2(1)=E0(2); x3(1)=E0(3);

a=1;
% calculation of phase portraits /numerical solution/:
for i=2:n
    x1(i)=((-25*a-20)*x1(i-1)+(25*a+10)*x2(i-1))*h^q1- memo(x1, c1, i);
    x2(i)=((28-35*a)*x1(i)+(29*a-24)*x2(i-1))*h^q2- memo(x2, c2, i);
    x3(i)=-1/3*(a+8)*x3(i-1)*h^q3- memo(x3, c3, i);
end
for j=1:n
    E(j,1)=x1(j);
    E(j,2)=x2(j);
    E(j,3)=x3(j);
end
T=h:h:TSim;
%
```

运行程序如下：

```
[t, y]=ChaosActiveControlb([0.9 0.92 0.91], 15, [-1 -2 1]);
figure(1)
plot(t,y(:,1),'-');
hold on
plot(t,y(:,2),'--');
hold on
plot(t,y(:,3),'::');
xlabel('Time(sec)');
ylabel('x1,x2,x3')
```

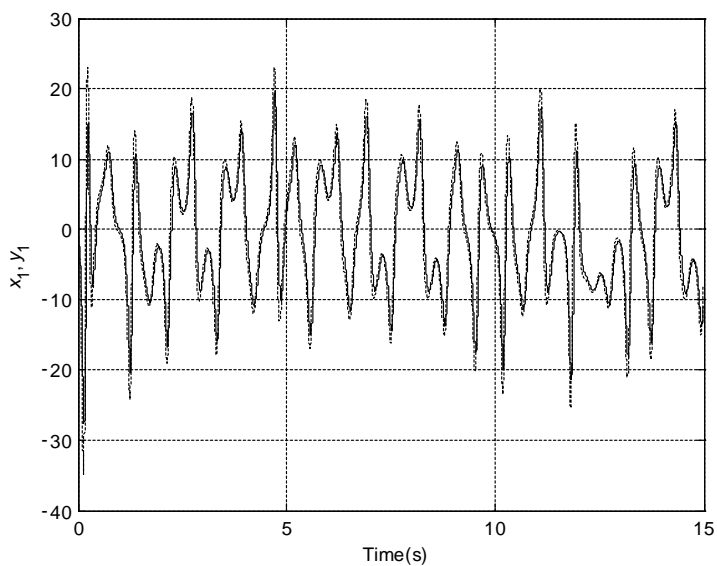


图 6-5 (a) 分数阶统一混沌系统的同步效果 $\alpha=1$, $\beta=0.5$, $k_1=10$, $k_2=23$ 。

其中，实线表示驱动系统 (6-1) 状态变量 $x_1(t)$ 的变化曲线，虚线表示

响应系统 (6-14) 状态变量 $y_2(t)$ 的变化曲线

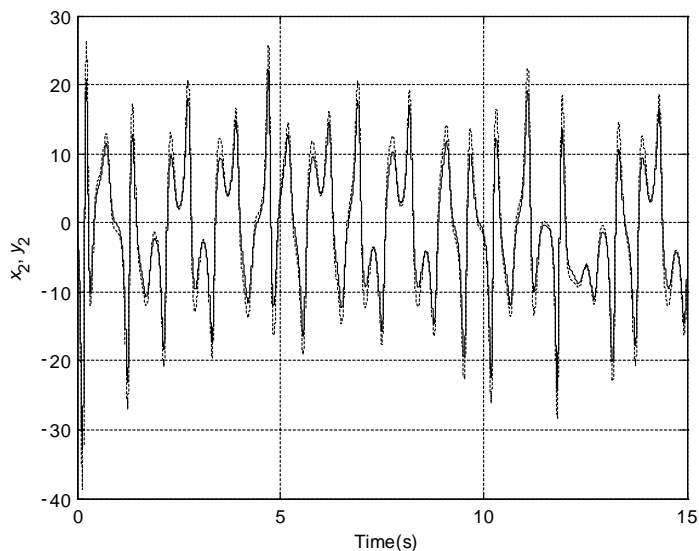


图 6-5 (b) 分数阶统一混沌系统的同步效果 $\alpha=1$, $\beta=0.5$, $k_1=10$, $k_2=23$ 。
其中, 实线表示驱动系统 (6-1) 状态变量 $x_2(t)$ 的变化曲线, 虚线表示
响应系统 (6-14) 状态变量 $y_2(t)$ 的变化曲线

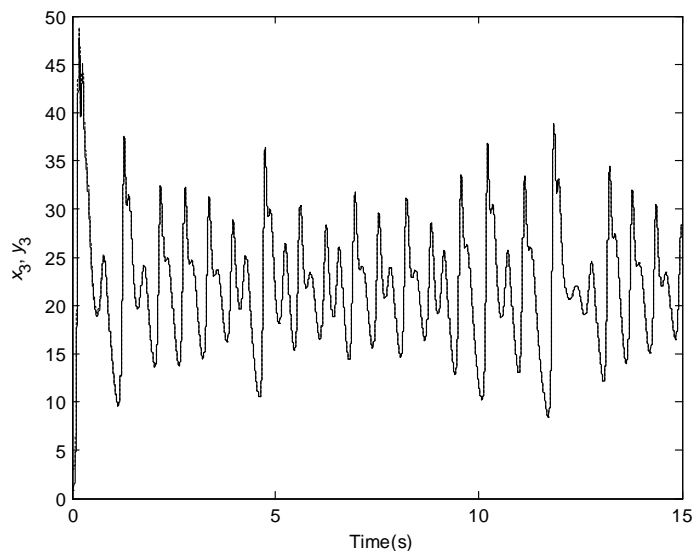


图 6-5 (c) 分数阶统一混沌系统的同步效果 $\alpha=1$, $\beta=0.5$, $k_1=10$, $k_2=23$ 。
其中, 实线表示驱动系统 (6-1) 状态变量 $x_3(t)$ 的变化曲线,
虚线表示响应系统 (6-14) 状态变量 $y_3(t)$ 的变化曲线

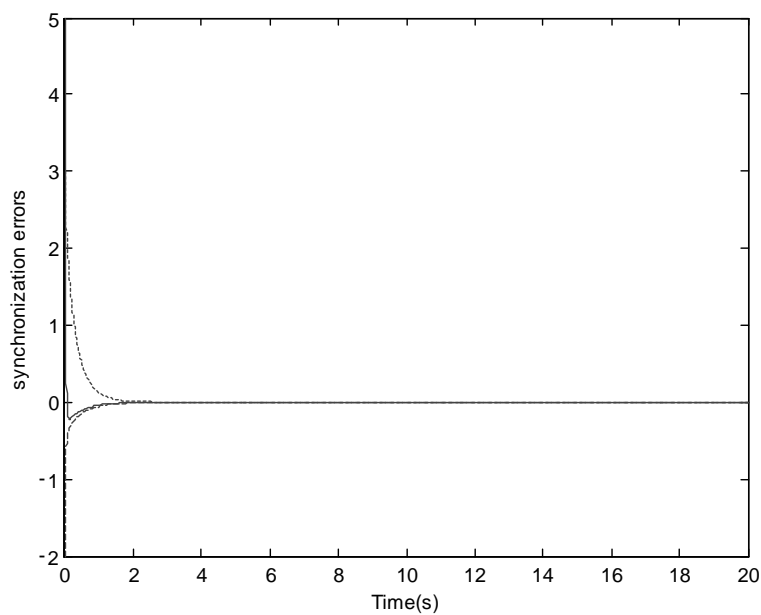


图 6-6 分数阶统一混沌系统的同步误差 $\alpha=1$, $\beta=0.5$, $k_1=10$, $k_2=23$ 。

实线表示 e_1 , 虚线表示 e_2 , 点线表示 e_3

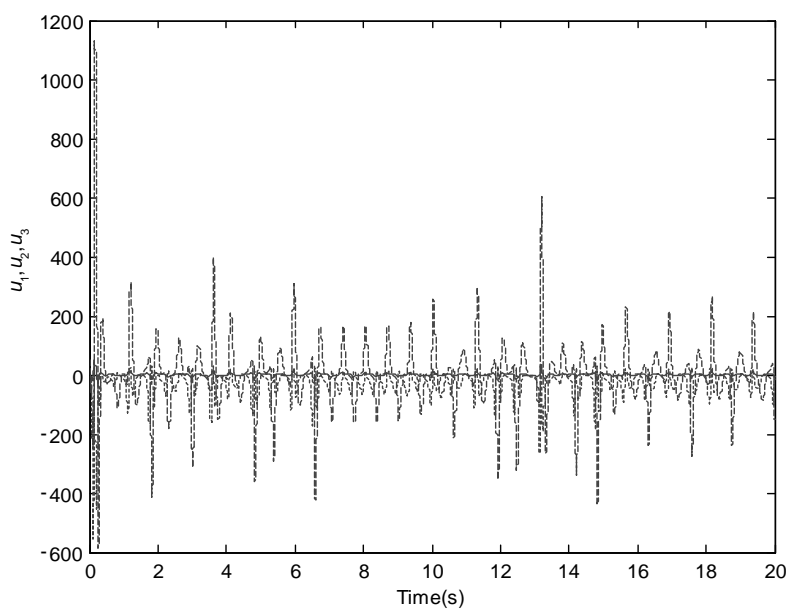


图 6-7 分数阶统一混沌系统的控制输入。实线表示 u_1 , 虚线表示 u_2 , 点线表示 u_3

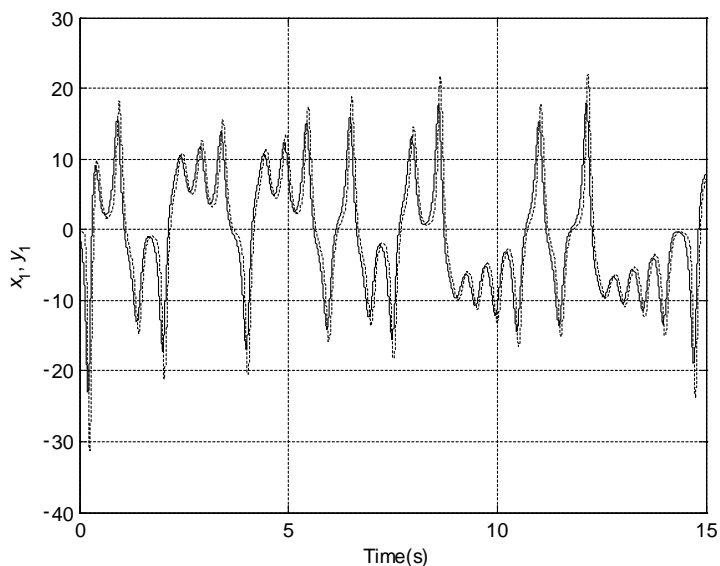


图 6-8 (a) 分数阶统一混沌系统的同步效果 $\alpha=0.3$, $\beta=0.8$, $k_1=10$, $k_2=23$ 。
其中, 实线表示驱动系统 (6-1) 状态变量 $x_1(t)$ 的变化曲线, 虚线表示
响应系统 (6-14) 状态变量 $y_1(t)$ 的变化曲线

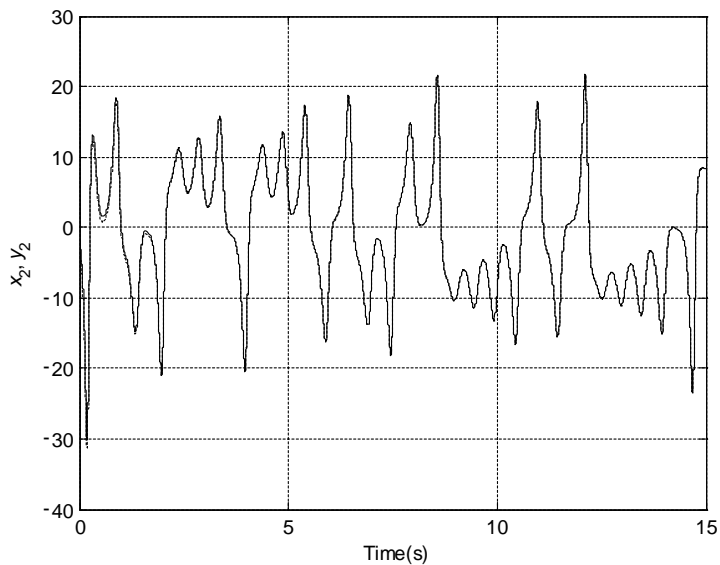


图 6-8 (b) 分数阶统一混沌系统的同步效果 $\alpha=0.3$, $\beta=0.8$, $k_1=10$, $k_2=23$ 。
其中, 实线表示驱动系统 (6-1) 状态变量 $x_2(t)$ 的变化曲线, 虚线表示
响应系统 (6-14) 状态变量 $y_2(t)$ 的变化曲线

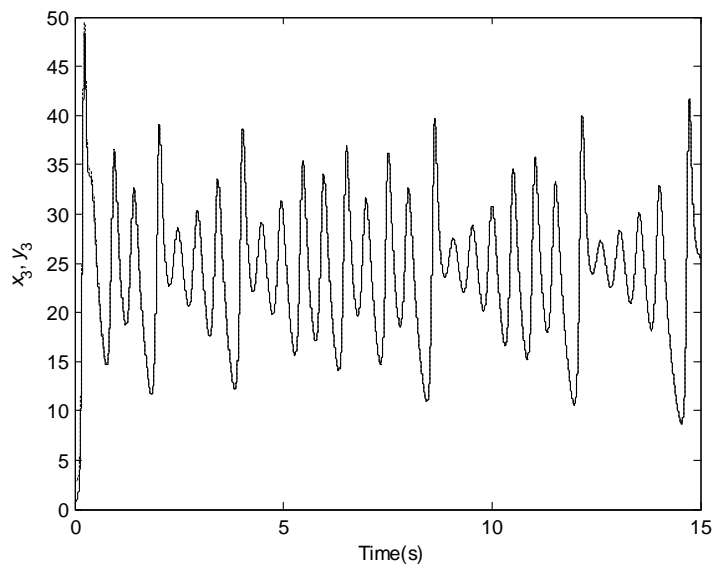


图 6-8 (c) 分数阶统一混沌系统的同步效果 $\alpha=0.3$, $\beta=0.8$, $k_1=10$, $k_2=23$ 。
其中, 实线表示驱动系统 (6-1) 状态变量 $x_3(t)$ 的变化曲线, 虚线表示
响应系统 (6-14) 状态变量 $y_3(t)$ 的变化曲线

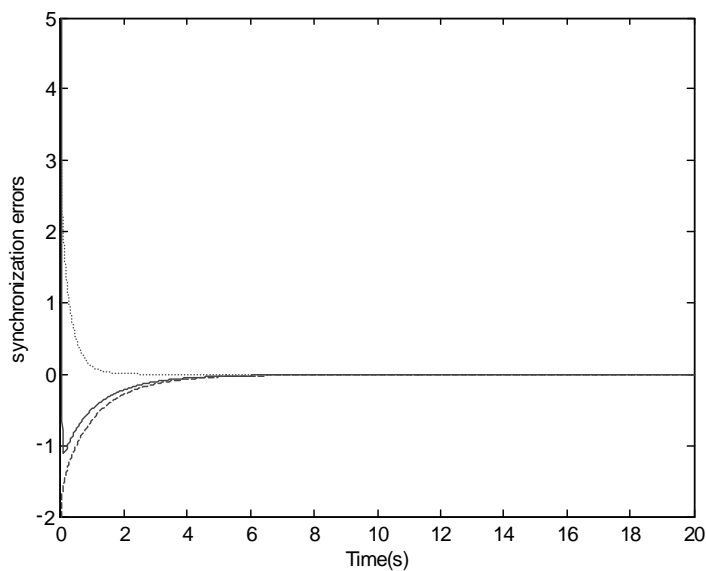


图 6-9 分数阶统一混沌系统的同步误差 $\alpha=0.3$, $\beta=0.8$, $k_1=10$, $k_2=23$ 。
其中, 实线表示 e_1 , 虚线表示 e_2 , 点线表示 e_3

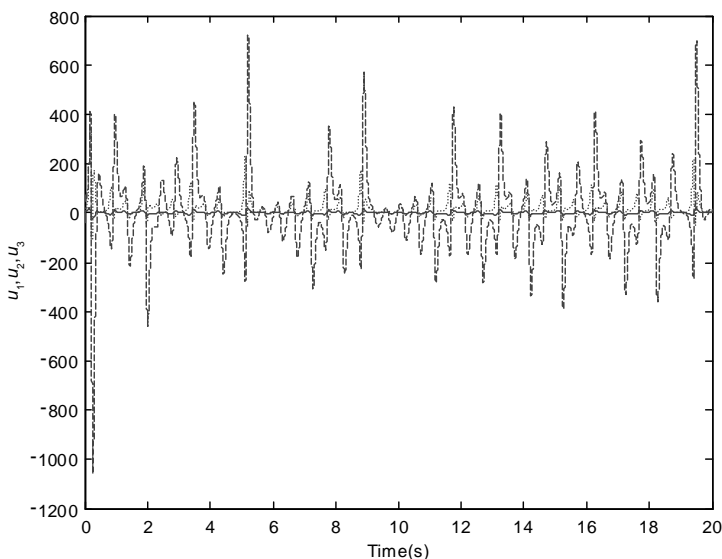


图 6-10 分数阶统一混沌系统的控制输入。实线表示 u_1 ，虚线表示 u_2 ，点线表示 u_3

$\alpha=1$ 时的仿真主程序如下：

```
function [T,E]=ChaosActiveSyn(parameters, orders, TSim, E0)
h=0.0005;
n=round(TSim/h);
q1=orders(1); q2=orders(2); q3=orders(3);
a=parameters(1); b=parameters(2);
k1=parameters(3); k2=parameters(4);

cp1=1; cp2=1; cp3=1;
for j=1:n
    c1(j)=(1-(1+q1)/j)*cp1;
    c2(j)=(1-(1+q2)/j)*cp2;
    c3(j)=(1-(1+q3)/j)*cp3;
    cp1=c1(j); cp2=c2(j); cp3=c3(j);
end
% initial conditions setting:
x1(1)=E0(1); x2(1)=E0(2); x3(1)=E0(3);
y1(1)=E0(4); y2(1)=E0(5); y3(1)=E0(6);
u1(1)=E0(7); u2(1)=E0(8); u3(1)=E0(9);
```

```

% calculation of phase portraits /numerical solution/:
for i=2:n
    x1(i)=(25*a+10)*(x2(i-1)-x1(i-1))*h^q1- memo(x1, c1, i);
    x2(i)=((28-35*a)*x1(i)-x1(i)*x3(i-1)+(29*a-1)*x2(i-1))*h^q2-
memo(x2, c2, i);
    x3(i)=(x1(i)*x2(i)-1/3*(a+8)*x3(i-1))*h^q3- memo(x3, c3, i);
    y1(i)=(25*b+10)*(y2(i-1)-y1(i-1)+u1(i-1))*h^q1-memo(y1, c1, i);
    y2(i)=((28-35*b)*y1(i)-y1(i)*y3(i-1)+(29*b-1)*y2(i-1)+u2(i-
1))*h^q2- memo(y2, c2, i);
    y3(i)=(y1(i)*y2(i)-1/3*(b+8)*y3(i-1)+u3(i-1))*h^q3- memo(y3,
c3, i);
    u1(i)=-25*(b-a)*(x2(i)-x1(i))-k1*(y1(i)-x1(i));
    u2(i)=35*(b-a)*x1(i)-(y1(i)-x1(i))*(y3(i)-x3(i))+y1(i)*(y3(i)-
x3(i))+y3(i)*(y1(i)-x1(i))-29*(b-a)*x2(i)-k2*(y2(i)-x2(i));
    u3(i)=1/3*(b-a)*x3(i)+(y1(i)-x1(i))*(y2(i)-x2(i))-y2(i)*
(y1(i)-x1(i))-y1(i)*(y2(i)-x2(i));
end
for j=1:n
    E(j,1)=x1(j);
    E(j,2)=x2(j);
    E(j,3)=x3(j);
    E(j,4)=y1(j);
    E(j,5)=y2(j);
    E(j,6)=y3(j);
    E(j,7)=u1(j);
    E(j,8)=u2(j);
    E(j,9)=u3(j);
end
T=h:h:TSim;
%
```

运行程序如下:

```

a=1;
b=0.8;
k1=10;
k2=23;
```

```
[t, y]=ChaosActiveSyn([a b k1 k2], [0.95 0.96 0.95], 15, [-1 -2 1
```

```

4 -4 4 -37.5000 74.5000 18.1667]);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% synchronization %%%%%%%%%%%%%%
figure(1);
subplot(3,1,1);
plot(t,y(:,1),'-',t,y(:,4),':');
xlabel('Time(sec)');
ylabel('x1,y1')
title('a')
subplot(3,1,2);
plot(t,y(:,2),'-',t,y(:,5),':');
xlabel('Time(sec)');
ylabel('x2,y2')
title('b')
subplot(3,1,3);
plot(t,y(:,3),'-',t,y(:,6),':');
xlabel('Time(sec)');
ylabel('x3,y3')
title('c')

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% u(t) %%%%%%%%%%%%%%figure(2);

plot(t,y(:,7),'-');
hold on
plot(t,y(:,8),'--');
hold on
plot(t,y(:,9),':');
xlabel('Time(sec)');
ylabel('u1,u2,u3')
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% e(t) %%%%%%%%%%%%%%
figure(3);
plot(t,y(:,4)-y(:,1),'-');
hold on
plot(t,y(:,5)-y(:,2),'--');
hold on
plot(t,y(:,6)-y(:,3),':');
xlabel('Time(sec)');
ylabel('e1,e2,e3')

```

6.4 本章小结

本章利用主动控制方法的设计思想，针对分数阶统一混沌系统的镇定问题设计反馈控制律，针对分数阶统一混沌系统的同步问题设计主动控制律，最后通过数值仿真验证了设计方法的有效性。

第 7 章

分数阶严反馈系统的反步控制 及同步设计

在整数阶混沌系统中，有一类系统的状态方程可以转化为严反馈的形式^[104, 105]。在分数阶系统中也同样如此。反步法基于 Lyapunov 稳定性理论，通过递推得到控制律，以实现系统的镇定或跟踪。反步法的基本思想是在设计控制器的过程中将系统状态方程的状态变量看作“虚拟控制量”。本章的主要任务是，通过分数阶 Genesio-Tesi 系统的例子，演示反步设计方法如何针对分数阶严反馈系统设计控制律。

7.1 问题描述

分数阶严反馈系统的状态方程具有如下形式：

$$\begin{cases} {}_0D_t^\alpha x_1 = f_1(x_1, x_2) \\ {}_0D_t^\alpha x_2 = f_2(x_1, x_2, x_3) \\ \dots \\ {}_0D_t^\alpha x_{n-1} = f_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ {}_0D_t^\alpha x_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) + f_{n+1}(t) \end{cases} \quad (7-1)$$

式中, $f_1(t)$ 为线性函数, $f_i(t)$, $i = 2, \dots, n+1$ 为非线性函数。

在已有的文献中, 下列分数阶混沌系统的状态方程可以转化为严反馈系统: 分数阶 Chua 系统^[53]、分数阶 Chen 系统^[59-61]、分数阶 Lu 系统^[62]、分数阶 Rossler 系统^[64, 65]、分数阶 Duffing 系统^[106]、分数阶 Genesio-Tesi 系统^[107]、分数阶 Arneodo 系统^[66]、分数阶 Van der Pol 系统^[54, 55]、分数阶 Phase-locked loop^[108]、分数阶 Rossler 超混沌系统^[64]。

本章的主要任务是基于积分算子的频率分布模型, 利用反步控制的理论和方法, 针对以上分数阶严反馈系统的控制与同步问题设计控制律。为了更清晰地阐述该方法的优点及设计的一般步骤, 我们选择分数阶 Genesio-Tesi 系统作为例子。

分数阶 Genesio-Tesi 系统可以用以下分数阶微分方程描述:

$$\begin{cases} {}_0D_t^\alpha x_1 = x_2 \\ {}_0D_t^\alpha x_2 = x_3 \\ {}_0D_t^\alpha x_3 = -\beta_1 x_1 - \beta_2 x_2 - \beta_3 x_3 + \beta_4 x_1^2 \end{cases} \quad (7-2)$$

当系统中的参数取值 $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 1.1$, $\beta_3 = 0.15$, $\beta_4 = 1$, $\alpha = 0.9$ ^[109]时, 该系统呈现混沌的状态。

下面首先针对标称系统设计控制律, 然后用同样的过程对同步问题设计控制律, 最后利用自适应技术针对参数未知情形下的不确定系统, 设计自适应反步控制。

7.2 基于反步法的分数阶 Genesio-Tesi 系统的控制设计

本节针对标称系统设计控制律。步骤如下:

步骤 1 针对分数阶状态方程 (7-2) 中的第一个方程, 定义第一个新坐标

$$w_1 = x_1 \quad (7-3)$$

从而得到了第一个新坐标的动力学方程

$${}_0D_t^\alpha w_1 = x_2 \quad (7-4)$$

根据积分算子的频率分布模型, 方程 (7-4) 等价于如下无穷维常微分方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial z_1(\omega, t)}{\partial t} = -\omega z_1(\omega, t) + x_2 \\ w_1(t) = \int_0^\infty \mu(\omega) z_1(\omega, t) d\omega \end{cases} \quad (7-5)$$

式中, $\mu(\omega) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \omega^{-\alpha}$ 。

选取 Lyapunov 函数

$$V_1(t) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \mu(\omega) z_1^2(\omega, t) d\omega \quad (7-6)$$

求导, 得

$$\dot{V}_1 = \int_0^\infty \mu(\omega) z_1(\omega, t) \frac{\partial z_1(\omega, t)}{\partial t} d\omega \quad (7-7)$$

将式 (7-5) 的第一个方程代入式 (7-7), 得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \int_0^\infty \mu(\omega) z_1(\omega, t) (-\omega z_1(\omega, t) + x_2) d\omega \\ &= -\int_0^\infty \mu(\omega) \omega z_1^2 d\omega + x_2 \int_0^\infty \mu(\omega) z_1 d\omega \end{aligned} \quad (7-8)$$

将式 (7-5) 的第二个方程代入式 (7-8), 得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= -\int_0^\infty \mu(\omega) \omega z_1^2 d\omega + x_2 w_1 \\ &= -\int_0^\infty \mu(\omega) \omega z_1^2 d\omega - x_1^2 + x_1(x_1 + x_2) \end{aligned} \quad (7-9)$$

步骤 2 定义第二个新坐标为

$$w_2 = x_1 + x_2 \quad (7-10)$$

其动力学方程为

$${}_0D_t^\alpha w_2 = x_2 + x_3 \quad (7-11)$$

方程 (7-11) 等价于如下无穷维常微分方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial z_2(\omega, t)}{\partial t} = -\omega z_2(\omega, t) + x_2 + x_3 \\ w_2(t) = \int_0^\infty \mu(\omega) z_2(\omega, t) d\omega \end{cases} \quad (7-12)$$

选取第二个 Lyapunov 函数

$$V_2(t) = V_1(t) + \frac{1}{2} \int_0^\infty \mu(\omega) z_2^2(\omega, t) d\omega \quad (7-13)$$

求导, 得

$$\dot{V}_2 = \dot{V}_1 + \int_0^\infty \mu(\omega) z_2(\omega, t) \frac{\partial z_2(\omega, t)}{\partial t} d\omega \quad (7-14)$$

将式 (7-12) 的第一个方程代入式 (7-14), 得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \dot{V}_1 + \int_0^\infty \mu(\omega) z_2(\omega, t) (-\omega z_2(\omega, t) + x_2 + x_3) d\omega \\ &= \dot{V}_1 - \int_0^\infty \mu(\omega) \omega z_2^2 d\omega + (x_2 + x_3) \int_0^\infty \mu(\omega) z_2 d\omega \end{aligned} \quad (7-15)$$

将式 (7-12) 的第二个方程代入式 (7-15), 得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \dot{V}_1 - \int_0^\infty \mu(\omega) \omega z_2^2 d\omega + x_2 (x_2 + x_3) \\ &= -\int_0^\infty \mu(\omega) \omega z_1^2 d\omega - \int_0^\infty \mu(\omega) \omega z_2^2 d\omega - \\ &\quad w_1^2 + w_1 w_2 + w_2 (x_2 + x_3) \\ &= -\int_0^\infty \mu(\omega) \omega z_1^2 d\omega - \int_0^\infty \mu(\omega) \omega z_2^2 d\omega - \\ &\quad w_1^2 - w_1^2 + w_2 (2x_1 + 2x_2 + x_3) \end{aligned} \quad (7-16)$$

步骤 3 定义第三个新坐标

$$w_3 = 2x_1 + 2x_2 + x_3 \quad (7-17)$$

其动力学方程为

$${}_0D_t^\alpha w_3 = 2x_2 + 2x_3 - \beta_1 x_1 - \beta_2 x_2 - \beta_3 x_3 + \beta_4 x_1^2 + u \quad (7-18)$$

方程 (7-18) 等价于如下无穷维常微分方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial z_3(\omega, t)}{\partial t} = -\omega z_3(\omega, t) + 2x_2 + 2x_3 - \beta_1 x_1 - \beta_2 x_2 - \beta_3 x_3 + \beta_4 x_1^2 + u \\ w_3(t) = \int_0^\infty \mu(\omega) z_3(\omega, t) d\omega \end{cases} \quad (7-19)$$

选取第三个 Lyapunov 函数

$$V_3(t) = V_2(t) + \frac{1}{2} \int_0^\infty \mu(\omega) z_3^2(\omega, t) d\omega \quad (7-20)$$

求导, 得

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &= \dot{V}_2 + \int_0^\infty \mu(\omega) z_3(\omega, t) \frac{\partial z_3(\omega, t)}{\partial t} d\omega \\ &= -\int_0^\infty \mu(\omega) \omega z_1^2 d\omega - \int_0^\infty \mu(\omega) \omega z_1^2 d\omega - \int_0^\infty \mu(\omega) \omega z_3^2 d\omega - \\ &\quad w_1^2 - w_2^2 - w_3^2 + w_3 \left[(3 - \beta_1) x_1 + (5 - \beta_2) x_2 + (3 - \beta_3) x_3 + \beta_4 x_1^4 + u \right] \end{aligned} \quad (7-21)$$

根据式 (7-21), 选取控制律为

$$u = (\beta_1 - 3) x_1 + (\beta_2 - 5) x_2 + (\beta_3 - 3) x_3 - \beta_4 x_1^4 \quad (7-22)$$

将式 (7-22) 代入式 (7-21), 得

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &= -\int_0^\infty \mu(\omega) \omega z_1^2 d\omega - \int_0^\infty \mu(\omega) \omega z_1^2 d\omega - \\ &\quad \int_0^\infty \mu(\omega) \omega z_3^2 d\omega - w_1^2 - w_2^2 - w_3^2 \end{aligned} \quad (7-23)$$

容易看出 \dot{V}_3 是负定的。因此, 得到 $t \rightarrow \infty$ 时 $w_i \rightarrow 0$, $i=1, 2, 3$ 。进一步得到, $t \rightarrow \infty$ 时 $w_i \rightarrow 0$, $i=1, 2, 3$ 。由此证明了在控制律 (7-22) 的作用下, 标称系统 (7-2) 得到了镇定。

7.3 基于反步法的分数阶 Genesio-Tesi 系统的同步设计

本节针对分数阶 Genesio-Tesi 系统在不同初始条件下的同步问题, 基于反步法设计反馈控制律。将系统 (7-2) 作为驱动系统, 将以下系统作为响应系统:

$$\begin{cases} {}_0D_t^\alpha y_1 = y_2 \\ {}_0D_t^\alpha y_2 = y_3 \\ {}_0D_t^\alpha y_3 = -\beta_1 y_1 - \beta_2 y_2 - \beta_3 y_3 + \beta_4 y_1^2 + u \end{cases} \quad (7-24)$$

定义两个系统之间的状态误差为 $e_i = y_i - x_i$, $i=1,2,3$, 由式 (7-2) 及式 (7-24) 得到状态误差的动力学方程

$$\begin{cases} {}_0D_t^\alpha e_1 = e_2 \\ {}_0D_t^\alpha e_2 = e_3 \\ {}_0D_t^\alpha e_3 = -\beta_1 e_1 - \beta_2 e_2 - \beta_3 e_3 + \beta_4 (x_1 + y_1) e_1 + u \end{cases} \quad (7-25)$$

为了针对响应系统 (7-24) 与驱动系统 (7-2) 之间的同步问题, 开展反步控制设计, 定义如 7.2 节相同的坐标变换式 (7-3)、式 (7-10) 及式 (7-17), 设计相同的 Lyapunov 函数式 (7-6)、式 (7-13) 及式 (7-20), 即可得到状态误差系统 (7-25) 的控制律:

$$u = -(3 - \beta_1 + \beta_4 x_1 + \beta_4 y_1) e_1 - (5 - \beta_2) e_2 - (5 - \beta_3) e_3$$

以上设计是针对的标称系统。下面考虑分数阶 Genesio-Tesi 系统中存在未知参数情形下的反步控制律设计问题。首先, 假设响应系统 (7-24) 的参数 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 未知, 其估计值为 $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3, \hat{\beta}_4$ 。此时, 响应系统的状态方程为

$$\begin{cases} {}_0D_t^\alpha y_1 = y_2 \\ {}_0D_t^\alpha y_2 = y_3 \\ {}_0D_t^\alpha y_3 = -\hat{\beta}_1 y_1 - \hat{\beta}_2 y_2 - \hat{\beta}_3 y_3 + \hat{\beta}_4 y_1^2 + u \end{cases} \quad (7-26)$$

状态误差的动力学方程为

$$\begin{cases} {}_0D_t^\alpha e_1 = e_2 \\ {}_0D_t^\alpha e_2 = e_3 \\ {}_0D_t^\alpha e_3 = (\beta_1 x_1 - \hat{\beta}_1 y_1) + (\beta_2 x_2 - \hat{\beta}_2 y_2) + (\beta_3 x_3 - \hat{\beta}_3 y_3) + \hat{\beta}_4 x_1^2 + u \end{cases} \quad (7-27)$$

选取如下 Lyapunov 函数:

$$V(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_0^\infty \mu(\omega) z_i^2(\omega, t) d\omega + \sum_{i=1}^4 \frac{1}{2\mu_i} (\hat{\beta}_i - \beta_i)^2 \quad (7-28)$$

式中, $\mu_i > 0$, $i=1,2,3,4$ 。

求导, 得

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -\int_0^\infty \mu(\omega) \omega z_1^2 d\omega - \int_0^\infty \mu(\omega) \omega z_2^2 d\omega - \int_0^\infty \mu(\omega) \omega z_3^2 d\omega - \\ & w_1^2 - w_2^2 - w_3^2 + \sum_{i=1}^4 \frac{1}{\mu_i} (\hat{\beta}_i - \beta_i) \dot{\hat{\beta}}_i + \\ & w_3 \left[(3 - \hat{\beta}_1) e_1 + (5 - \hat{\beta}_2) e_2 + (3 - \hat{\beta}_3) e_3 - \hat{\beta}_4 (x_1^2 - y_1^2) + u \right] \end{aligned} \quad (7-29)$$

根据式 (7-29) 设计控制律及自适应律分别为

$$u = (\hat{\beta}_1 - 3) e_1 + (\hat{\beta}_2 - 5) e_2 + (\hat{\beta}_3 - 3) e_3 + \hat{\beta}_4 (x_1^2 - y_1^2) \quad (7-30)$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{\beta}}_1 = \mu_1 x_1 (2x_1 + 2x_2 + x_3) \\ \dot{\hat{\beta}}_2 = \mu_2 x_2 (2x_1 + 2x_2 + x_3) \\ \dot{\hat{\beta}}_3 = \mu_3 x_3 (2x_1 + 2x_2 + x_3) \\ \dot{\hat{\beta}}_4 = -\mu_4 (2x_1 + 2x_2 + x_3) x_1^2 \end{cases} \quad (7-31)$$

将控制律 (7-30) 及自适应律 (7-31) 代入式 (7-29), 得

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -\int_0^\infty \mu(\omega) \omega z_1^2 d\omega - \int_0^\infty \mu(\omega) \omega z_2^2 d\omega - \\ & \int_0^\infty \mu(\omega) \omega z_3^2 d\omega - w_1^2 - w_2^2 - w_3^2 \end{aligned} \quad (7-32)$$

根据 Lyapunov 稳定性定理, $t \rightarrow \infty$ 时 $w_i \rightarrow 0$, $i=1,2,3$ 。从而 $t \rightarrow \infty$ 时 $x_i \rightarrow 0$, $i=1,2,3$ 。由此得到结论: 在控制律 (7-30) 及自适应律 (7-31) 的作用下, 不确定 Genesio-Tesi 系统 (7-26) 与驱动系统 (7-2) 之间完成了同步。

7.4 数值模拟

本节通过分数阶 Genesio-Tesi 的数值模拟来验证反步方法设计控制律的有效性。对于 7.1 节列出的符合严反馈形式的其他分数阶混沌系统, 也很容易利用反步方法设计控制律。

$$x_1(t) = x_1(0^+) = -0.2, \quad x_2(t) = x_2(0^+) = 0.5, \quad x_3(t) = x_3(0^+) = 0.1$$

式中, $-\infty < t < 0$ 。

图 7-1 和图 7-2 显示了分数阶 Genesio-Tesi 系统的控制效果。其中, 图 7-1 描述了受控分数阶 Genesio-Tesi 系统的状态变化, 图 7-2 控制输入的变化曲线。在同步问题的数值仿真中, 驱动系统和响应系统的初值分别设定为

$$x_1(t) = x_1(0^+) = -0.2, \quad x_2(t) = x_2(0^+) = 0.5, \quad x_3(t) = x_3(0^+) = 0.1$$

$$y_1(t) = y_1(0^+) = 0.5, \quad y_2(t) = y_2(0^+) = 0.2, \quad y_3(t) = y_3(0^+) = -0.3$$

式中, $-\infty < t < 0$ 。

图 7-3~图 7-5 显示了分数阶 Genesio-Tesi 系统的同步效果。图 7-6~图 7-8 显示了分数阶 Genesio-Tesi 系统的存在不确定性情形下的同步效果。

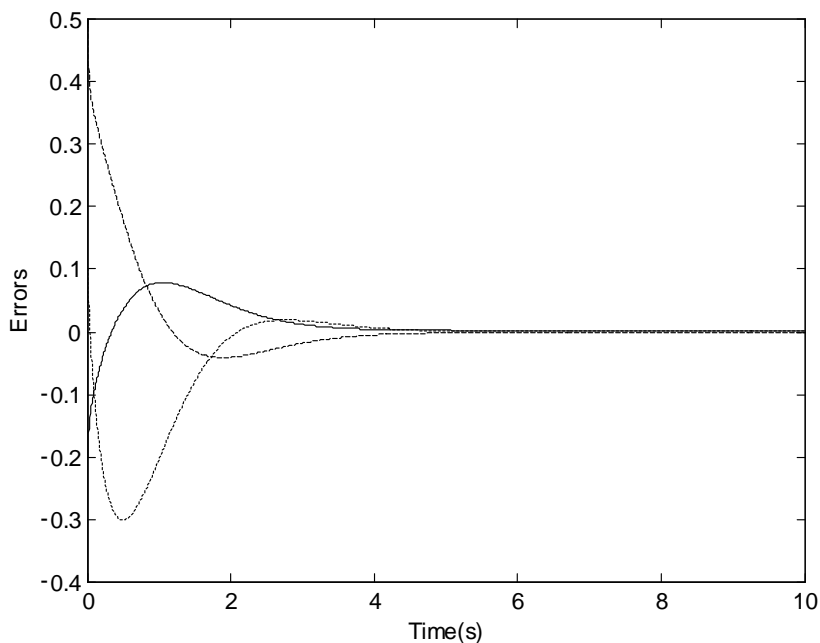


图 7-1 受控系统的状态变化曲线, 实线表示状态变量 x_1 , 虚线表示状态变量 x_2 , 点线表示状态变量 x_3

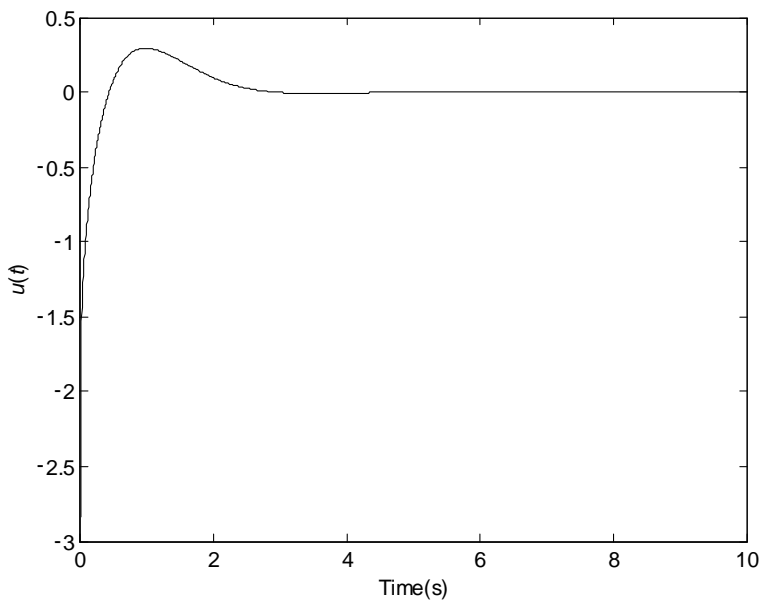


图 7-2 控制输入的变化曲线

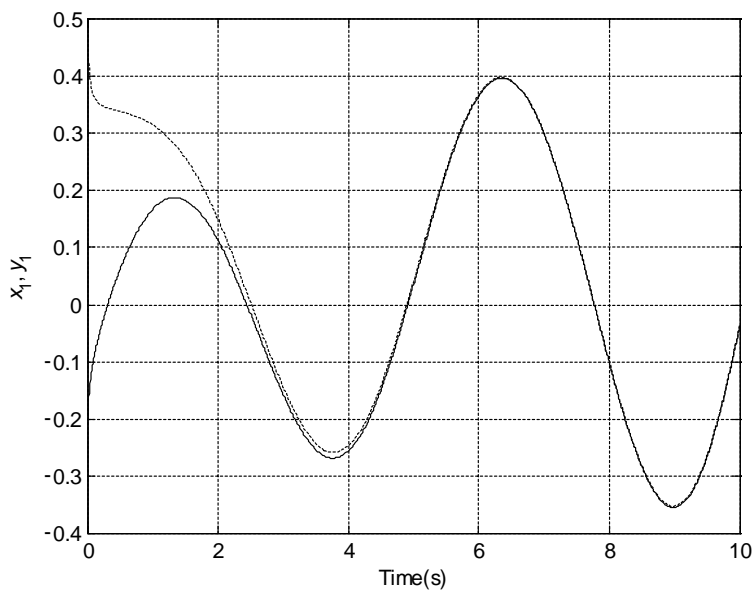


图 7-3 (a) 标称系统的同步效果。其中实线表示驱动系统 (7-2) 状态变量 $x_1(t)$ 的变化曲线, 点线表示响应系统 (7-24) 状态变量 $y_1(t)$ 的变化曲线

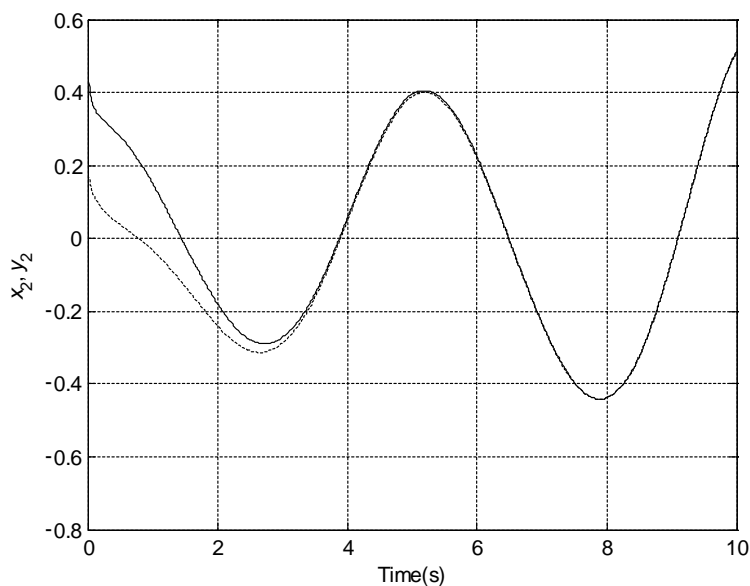


图 7-3 (b) 标称系统的同步效果。其中，实线表示驱动系统 (7-2) 状态变量 $x_2(t)$ 的变化曲线，点线表示响应系统 (7-24) 状态变量 $y_2(t)$ 的变化曲线

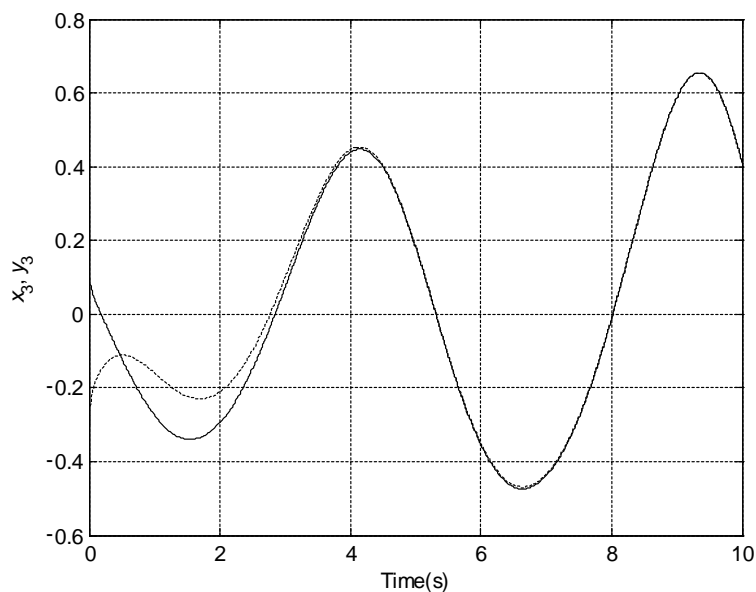


图 7-3 (c) 标称系统的同步效果。其中，实线表示驱动系统 (7-2) 状态变量 $x_3(t)$ 的变化曲线，点线表示响应系统 (7-24) 状态变量 $y_3(t)$ 的变化曲线

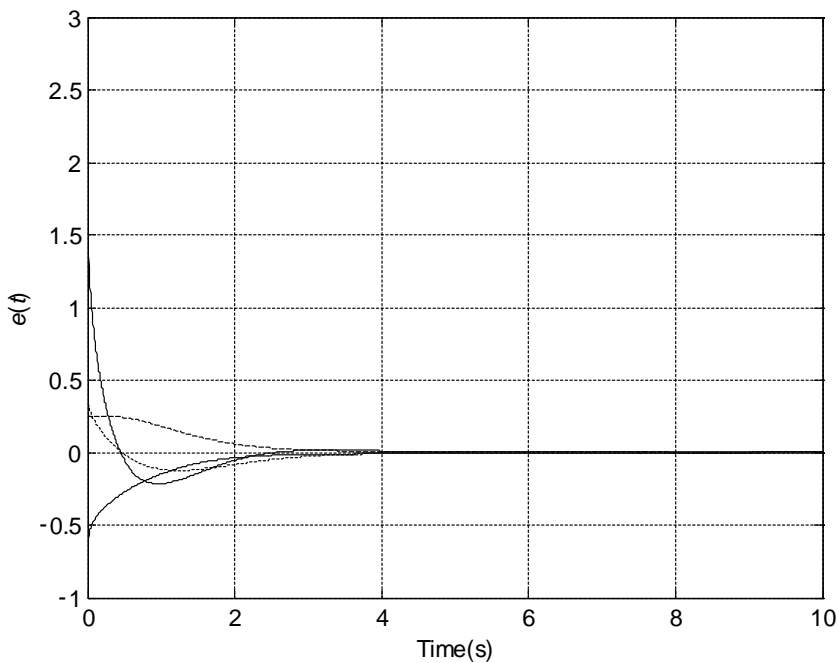


图 7-4 分数阶 Genesio-Tesi 系统的同步误差。实线表示状态变量 e_1 ，
虚线表示状态变量 e_2 ，点线表示状态变量 e_3

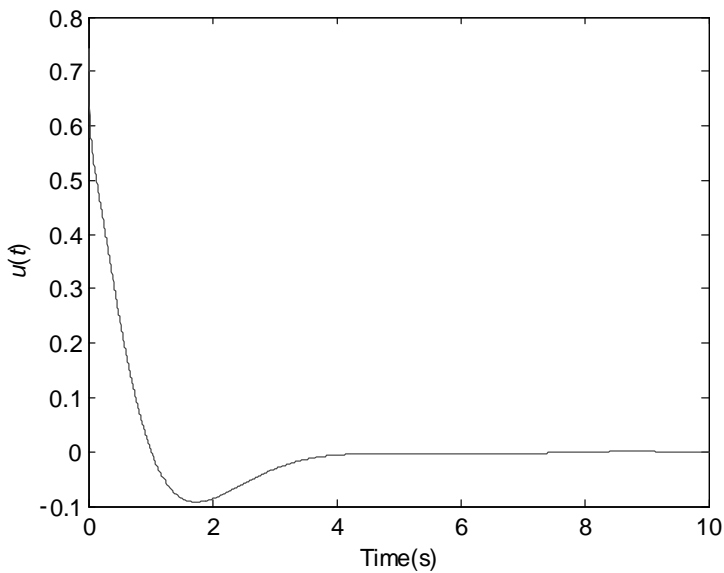


图 7-5 控制输入的变化曲线

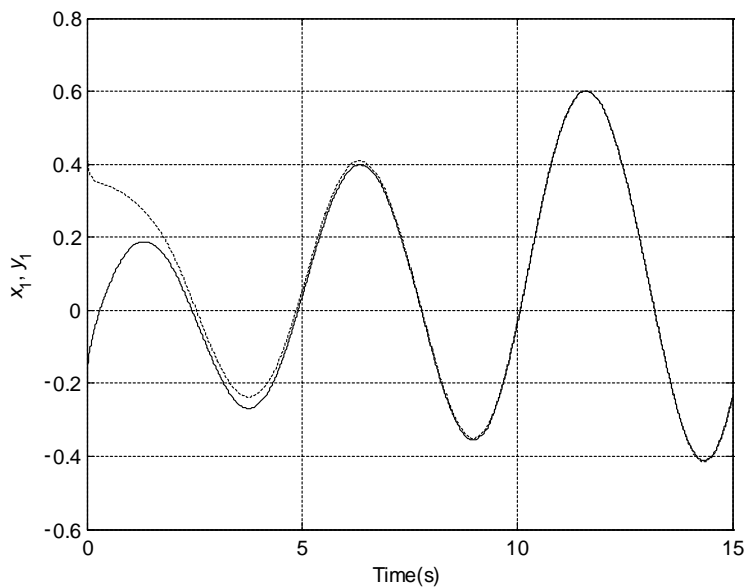


图 7-6 (a) 标称系统与不确定系统的同步效果。其中，实线表示驱动系统 (7-2) 状态变量 $x_1(t)$ 的变化曲线，点线表示响应系统 (7-26) 状态变量 $y_1(t)$ 的变化曲线

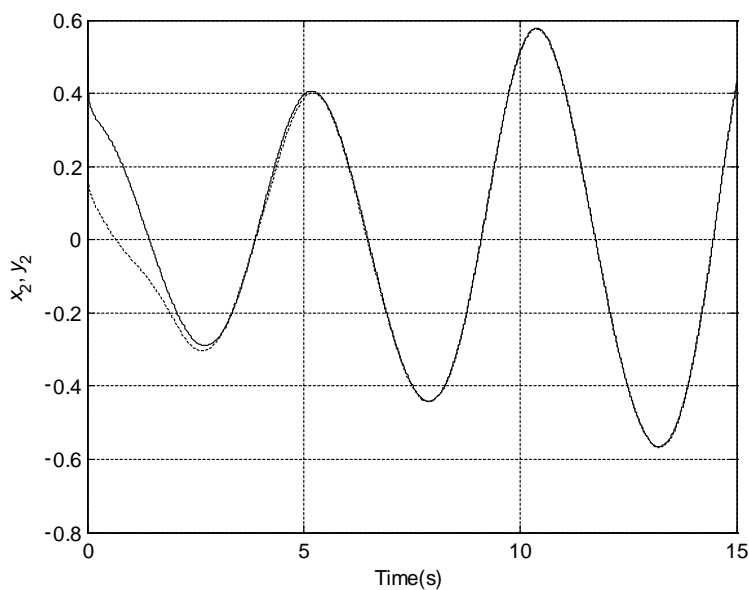


图 7-6 (b) 标称系统与不确定系统的同步效果。其中，实线表示驱动系统 (7-2) 状态变量 $x_2(t)$ 的变化曲线，点线表示响应系统 (7-26) 状态变量 $y_2(t)$ 的变化曲线

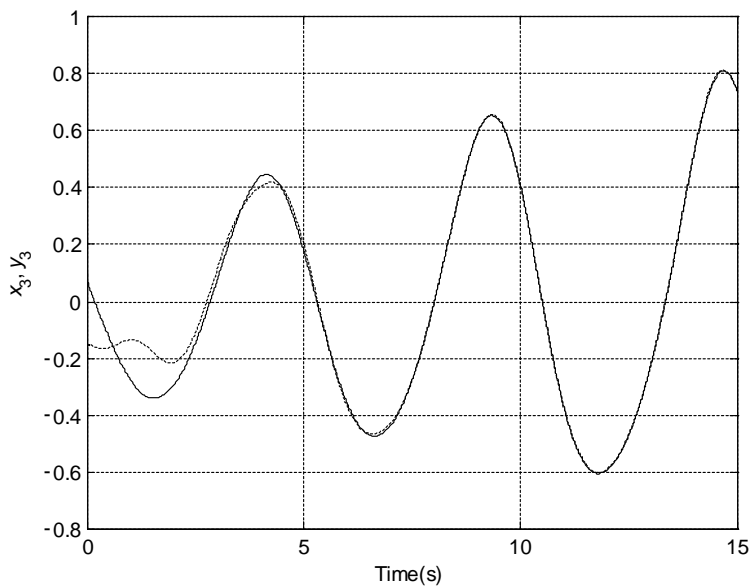


图 7-6 (c) 标称系统与不确定系统的同步效果。其中，实线表示驱动系统 (7-2) 状态变量 $x_3(t)$ 的变化曲线，点线表示响应系统 (7-26) 状态变量 $y_3(t)$ 的变化曲线

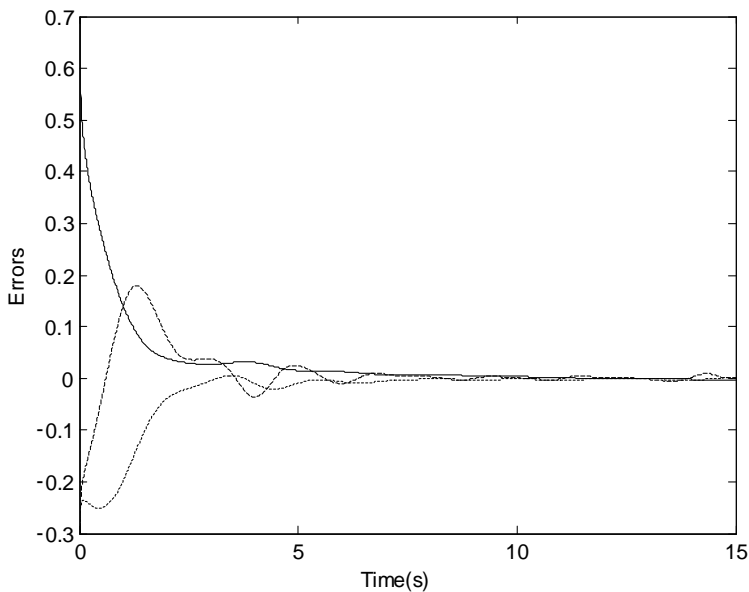


图 7-7 标称系统与不确定系统的同步误差。实线表示误差变量 e_1 ，点线表示误差变量 e_2 ，虚线表示误差变量 e_3

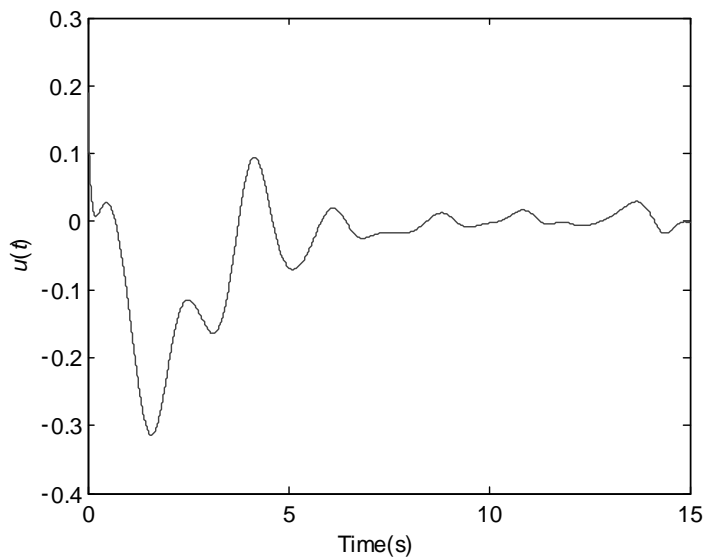


图 7-8 控制输入的变化曲线

图 7-1 和图 7-2 的主程序为 FOGenTesiControl.m:

```
function [T, Y]=FOGenTesiControl(parameters, orders, TSim, Y0)
% Control of the Fractional-Order Genesio-Tesi's System
% time step:
h=0.005;
% number of calculated mesh points:
n=round(TSim/h);
%orders of derivatives, respectively:
q1=orders(1); q2=orders(2); q3=orders(3);
% constants of Genesio-Tesi's system:
b1=parameters(1); b2=parameters(2);
b3=parameters(3); b4=parameters(4);
% binomial coefficients calculation:
cp1=1; cp2=1; cp3=1;
for j=1:n
    c1(j)=(1-(1+q1)/j)*cp1;
    c2(j)=(1-(1+q2)/j)*cp2;
    c3(j)=(1-(1+q3)/j)*cp3;
    cp1=c1(j); cp2=c2(j); cp3=c3(j);
end
```

```

% initial conditions setting:
x(1)=Y0(1); y(1)=Y0(2); z(1)=Y0(3); u(1)=Y0(4);
% calculation of phase portraits /numerical solution/:
for i=2:n
    x(i)=(y(i-1))*h^q1 - memo(x, c1, i);
    y(i)=(z(i-1))*h^q2 - memo(y, c2, i);
    z(i)=(-3*x(i)-5*y(i)-3*z(i-1))*h^q3 - memo(z, c3, i);
    u(i)=(b1-3)*x(i)+(b2-5)*y(i)+(b3-3)*z(i)-b4*x(i).^2;
end
for j=1:n
    Y(j,1)=x(j);
    Y(j,2)=y(j);
    Y(j,3)=z(j);
    Y(j,4)=u(j);
end
T=h:h:TSim;

```

图 7-1 和图 7-2 的运行程序如下:

```

[t, y]=FOGenTesiControl([1 1.1 0.15 1.0], [0.9 0.9 0.9], 10, [-0.2
0.5 0.1 -2.835]);
figure(1);
plot(t,y(:,1),'r');
hold on
plot(t,y(:,2),'b');
hold on
plot(t,y(:,3),'k');
xlabel('Time(sec)');
ylabel('Errors')

figure(2);
plot(t,y(:,4));
xlabel('Time(sec)');
ylabel('u(t)')

```

图 7-3~图 7-5 的主程序为 FOGenTesiSyn.m:

```

function [T, Y]=FOGenTesiSyn(parameters, orders, TSim, Y0)
% Synchronization of the Fractional-Order Genesio-Tesi's System
% time step:

```

```

h=0.005;
% number of calculated mesh points:
n=round(TSim/h);
%orders of derivatives, respectively:
q1=orders(1); q2=orders(2); q3=orders(3);
% constants of Genesio-Tesi's system:
b1=parameters(1); b2=parameters(2);
b3=parameters(3); b4=parameters(4);
% binomial coefficients calculation:
cp1=1; cp2=1; cp3=1;
for j=1:n
    c1(j)=(1-(1+q1)/j)*cp1;
    c2(j)=(1-(1+q2)/j)*cp2;
    c3(j)=(1-(1+q3)/j)*cp3;
    cp1=c1(j); cp2=c2(j); cp3=c3(j);
end
% initial conditions setting:
x1(1)=Y0(1); y1(1)=Y0(2); z1(1)=Y0(3);
x2(1)=Y0(4); y2(1)=Y0(5); z2(1)=Y0(6);u(1)=Y0(7);
% calculation of phase portraits /numerical solution/:
for i=2:n
    x1(i)=(y1(i-1))*h^q1 - memo(x1, c1, i);
    y1(i)=(z1(i-1))*h^q2 - memo(y1, c2, i);
    z1(i)=(-b1*x1(i)-b2*y1(i)-b3*z1(i-1)+b4*x1(i).^2)*h^q3 - memo
(z1, c3, i);
    x2(i)=(y2(i-1))*h^q1 - memo(x2, c1, i);
    y2(i)=(z2(i-1))*h^q2 - memo(y2, c2, i);
    z2(i)=(-b1*x2(i)-b2*y2(i)-b3*z2(i-1)+b4*x2(i).^2-(3-b1+x1(i)+
x2(i))*(x2(i)-x1(i))-(5-b2)*(y2(i)-y1(i))-(3-b3)*(z2(i-1)-z1(i)))*h^
q3 - memo(z2, c3, i);
    u(i)=-((3-b1+x1(i)+x2(i))*(x2(i)-x1(i))-(5-b2)*(y2(i)-y1(i))-
(3-b3)*(z2(i-1)-z1(i)));
end
for j=1:n
    Y(j,1)=x1(j);
    Y(j,2)=y1(j);
    Y(j,3)=z1(j);
    Y(j,4)=x2(j);

```



```
Y(j,5)=y2(j);
Y(j,6)=z2(j);
Y(j,7)=u(j);

end
T=h:h:TSim;
%
```

图 7-3~图 7-5 的运行程序如下:

```
[t, y]=FOGenTesiSyn([1 1.1 0.15 1.0], [0.9 0.9 0.9], 10, [-0.2 0.5
0.1 0.5 0.2 -0.3 0.7]);
figure(1);
subplot(3,1,1);
plot(t,y(:,1),'k-',t,y(:,4),'k:');
xlabel('Time(sec)');
ylabel('{x}_{1}, {y}_{1}');
title('a')
grid on;
subplot(3,1,2);
plot(t,y(:,2),'k-',t,y(:,5),'k:');
xlabel('Time(sec)');
ylabel('{x}_{2}, {y}_{2}');
title('b')
grid on;
subplot(3,1,3);
plot(t,y(:,3),'k-',t,y(:,6),'k:');
xlabel('Time(sec)');
ylabel('{x}_{3}, {y}_{3}');
title('c')
grid on;
figure(2);
plot(t,y(:,7));
xlabel('Time(sec)');
ylabel('u(t)');
figure(3);
plot(t,y(:,1)-y(:,4),'k-');
hold on
plot(t,y(:,2)-y(:,5),'k--');
```

```

hold on
plot(t,y(:,3)-y(:,6),'k:');
hold on
xlabel('Time(sec)');
ylabel('e(t)')
grid on;

```

图 7-6~图 7-8 的主程序为 FOGenTesiSynAdaptive.m:

```

function [T, Y]=FOGenTesiSynAdaptive(parameters, orders, TSim, Y0)
% time step:
h=0.005;
% number of calculated mesh points:
n=round(TSim/h);
%orders of derivatives, respectively:
q1=orders(1); q2=orders(2); q3=orders(3);q4=orders(4);
% constants of Genesio-Tesi's system:
b1=parameters(1); b2=parameters(2);
b3=parameters(3); b4=parameters(4);
% binomial coefficients calculation:
cp1=1; cp2=1; cp3=1;cp4=1;
for j=1:n
    c1(j)=(1-(1+q1)/j)*cp1;
    c2(j)=(1-(1+q2)/j)*cp2;
    c3(j)=(1-(1+q3)/j)*cp3;
    c4(j)=(1-(1+q4)/j)*cp4;
    cp1=c1(j); cp2=c2(j); cp3=c3(j);cp4=c4(j);
end
% initial conditions setting:
x1(1)=Y0(1); y1(1)=Y0(2); z1(1)=Y0(3);
x2(1)=Y0(4); y2(1)=Y0(5); z2(1)=Y0(6);
a1(1)=Y0(7); a2(1)=Y0(8); a3(1)=Y0(9);
a4(1)=Y0(10);u(1)=Y0(11);
% calculation of phase portraits /numerical solution/:
for i=2:n
    x1(i)=(y1(i-1))*h^q1 - memo(x1, c1, i);
    y1(i)=(z1(i-1))*h^q2 - memo(y1, c2, i);
    z1(i)=(-b1*x1(i)-b2*y1(i)-b3*z1(i-1)+b4*x1(i).^2)*h^q3 - memo
(z1, c3, i);

```

```

x2(i)=(y2(i-1))*h^q1 - memo(x2, c1, i);
y2(i)=(z2(i-1))*h^q2 - memo(y2, c2, i);
z2(i)=(-a1(i-1)*x2(i)-a2(i-1)*y2(i)-a3(i-1)*z2(i-1)+a4(i-1)*
x2(i).^2+(a1(i-1)-3)*(x2(i)-x1(i))+(a2(i-1)-5)*(y2(i)-y1(i))+(a3(i-1)
-3)*(z2(i-1)-z1(i))+a4(i-1)*(x1(i).^2-x2(i).^2))*h^q3 - memo(z2, c3, i);
a1(i)=50*h*x1(i)*(2*(x2(i)-x1(i))+2*(y2(i)-y1(i))+(z2(i)-
z1(i)))- memo(a1, c4, i);
a2(i)=50*h*y1(i)*(2*(x2(i)-x1(i))+2*(y2(i)-y1(i))+(z2(i)-
z1(i)))- memo(a2, c4, i);
a3(i)=50*h*z1(i)*(2*(x2(i)-x1(i))+2*(y2(i)-y1(i))+(z2(i)-
z1(i)))- memo(a3, c4, i);
a4(i)=-50*h*x1(i).^2*(2*(x2(i)-x1(i))+2*(y2(i)-y1(i))+(z2(i)-
z1(i)))- memo(a4, c4, i);
u(i)=(a1(i)-3)*(x2(i)-x1(i))+(a2(i)-5)*(y2(i)-y1(i))+(a3(i)-
3)*(z2(i)-z1(i))+a4(i)*(x1(i).^2-x2(i).^2);
end
for j=1:n
    Y(j,1)=x1(j);
    Y(j,2)=y1(j);
    Y(j,3)=z1(j);
    Y(j,4)=x2(j);
    Y(j,5)=y2(j);
    Y(j,6)=z2(j);
    Y(j,7)=a1(j);
    Y(j,8)=a2(j);
    Y(j,9)=a3(j);
    Y(j,10)=a4(j);
    Y(j,11)=u(j);

end
T=h:h:TSim;
%
```

图 7-6~图 7-8 的运行程序如下:

```

[t, y]=FOGenTesiSynAdaptive([1 1.1 0.15 1.0], [0.9 0.9 0.9 1],15,
[-0.2 0.5 0.1 0.5 0.2 -0.2 1 1 1 0.19]);
%%%%%%%%%%%% Synchronization %%%%%%%%%%%%%%
figure(1);
```

```

subplot(3,1,1);
plot(t,y(:,1),'k-',t,y(:,4),'k:');
xlabel('Time(sec)');
ylabel('{x}_{1}, {y}_{1}')
title('a')
grid on;
subplot(3,1,2);
plot(t,y(:,2),'k-',t,y(:,5),'k:');
xlabel('Time(sec)');
ylabel('{x}_{2}, {y}_{2}')
title('b')
grid on;
subplot(3,1,3);
plot(t,y(:,3),'k-',t,y(:,6),'k:');
xlabel('Time(sec)');
ylabel('{x}_{3}, {y}_{3}')
title('c')
grid on;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Errors %%%%%%%%%
figure(2);
plot(t,y(:,4)-y(:,1),'k-');
hold on
plot(t,y(:,5)-y(:,2),'k:');
hold on
plot(t,y(:,6)-y(:,3),'k--');
xlabel('Time(sec)');
ylabel('Errors')
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% u %%%%%%%%%
figure(3);
plot(t,y(:,11));
xlabel('Time(sec)');
ylabel('u(t)')

```

7.5 本章小结

本章基于分数阶积分算子的频率分布模型和 Lyapunov 稳定性理论, 利用反步技术针对分数阶严反馈系统设计了反馈控制律。为了演示反步设计方法如何针对分数阶严反馈系统设计控制律, 本章主要针对分数阶 Genesio-Tesi 系统的控制与同步问题, 分别设计了标称系统的反馈控制律及不确定系统的自适应控制律。应该指出, 该方法可以应用于可以转化为严反馈形式的分数阶系统, 且具有以下优点:

- ① 它提供了控制律设计的系统的步骤。
- ② 只需要一个控制律即可实现系统的控制或同步。

③ 控制律的表达式中只含有状态变量, 不含有状态变量的任何整数阶导数或分数阶导数项, 因此容易实现。

第 8 章

分数阶伴随型系统的滑模控制设计

本章将围绕分数阶伴随型系统的控制与同步问题，开展分数阶滑模控制理论与方法的研究。首先给出分数阶单输入单输出非线性系统的数学模型，设计一般形式的分数阶滑模面，然后基于 Mittag-Leffler 稳定性定理，证明滑模面的动力学稳定性，基于 Lyapunov 稳定性理论设计滑模控制律，最后通过数值仿真验证所设计控制律的有效性。

8.1 问题描述

考虑以下分数阶单输入单输出非线性系统，即分数阶伴随型系统

$$\begin{cases} D^q x_i = x_{i+1}, i = 1, 2, \dots, n-1 \\ D^q x_n = f(x) + g(x)u \\ y = x_1 \end{cases} \quad (8-1)$$

式中， $q \in (0, 1]$ 为分数阶系统的导数阶次， $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n$ 为伪状态变

量, $u, y \in R$ 分别为分数阶系统的输入与输出。 $f(x)$ 为未知函数, 可能是非线性函数或者时变函数, 估计值为 $\hat{f}(x)$ 。控制增益 $g(x)$ 也是未知函数, 可能是时变函数或者状态变量的函数。

假设 1 $f(x)$ 与其估计值的误差是有界的, 满足

$$|f(x) - \hat{f}(x)| \leq F(x)$$

式中, $F(x)$ 为已知函数。

假设 2 $g(x)$ 是有界的, 满足

$$0 < g_{\min}(x) \leq g(x) \leq g_{\max}(x)$$

式中, $g_{\min}(x)$ 与 $g_{\max}(x)$ 均是已知函数。

假设 3 记期望跟踪信号为 $y_d(t)$, 满足 $y_d(t) \in C^n[0, \infty)$, 且 $y_d(t), D^q y_d(t), \dots, D^{nq} y_d(t)$ 都是有界的。

本章的主要目标是设计合适的滑模控制律, 使得分数阶单输入单输出非线性系统 (8-1) 的输出跟踪期望信号 $y_d(t)$, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - y_d(t)) = 0$ 。

8.2 控制律设计

定义跟踪误差

$$\tilde{x} = y - y_d \quad (8-2)$$

定义如下跟踪误差向量:

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x - (y_d, D^q y_d, \dots, D^{(n-1)q} y_d)^T \\ &= (\tilde{x}, D^q \tilde{x}, \dots, D^{(n-1)q} \tilde{x})^T \end{aligned} \quad (8-3)$$

设计分数阶滑模面:

$$s = c_1 \tilde{x} + c_2 D^q \tilde{x} + \dots + c_{n-1} D^{(n-2)q} \tilde{x} + D^{(n-1)q} \tilde{x} \quad (8-4)$$

式中, 多项式 $P(p) = c_1 + c_2 p + \dots + c_{n-1} p^{n-2} + p^{n-1}$ 满足分数阶线性微分方程的

Routh-Hurwitz 条件^[110]。

分数阶滑模面 (8-4) 变形为

$$\begin{aligned}
 s(t) &= D^{(n-1)q} \tilde{x} + \sum_{i=1}^{n-1} c_i D^{(i-1)q} \tilde{x} \\
 &= D^{(n-1)q} y - D^{(n-1)q} y_d + \sum_{i=1}^{n-1} c_i D^{(i-1)q} \tilde{x} \\
 &= D^{(n-1)q} x_1 - D^{(n-1)q} y_d + \sum_{i=1}^{n-1} c_i D^{(i-1)q} \tilde{x} \\
 &= x_n - D^{(n-1)q} y_d + \sum_{i=1}^{n-1} c_i D^{(i-1)q} \tilde{x}
 \end{aligned}$$

求分数阶滑模面 (8-4) 关于时间的 q 阶分数阶导数, 得

$$D^q s = D^q x_n - D^{nq} y_d + \sum_{i=1}^{n-1} c_i D^{iq} \tilde{x} \quad (8-5)$$

将 (8-1) 中的第二个方程代入式 (8-5), 得

$$D^q s = f(x) + g(x)u - D^{nq} y_d + \sum_{i=1}^{n-1} c_i D^{iq} \tilde{x}$$

根据假设 2, 选择 $g(x)$ 的估计值

$$\hat{g}(x) = \sqrt{g_{\min}(x) g_{\max}(x)}$$

$g(x)$ 的界写为

$$\beta^{-1} \leq \frac{\hat{g}(x)}{g(x)} \leq \beta$$

式中, $\beta = \sqrt{\frac{g_{\max}}{g_{\min}}}$ 。

设计控制律

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{1}{\hat{g}(x)} \left[-\hat{f}(x) + D^{nq} y_d - \sum_{i=1}^{n-1} c_i D^{iq} \tilde{x} - k(x) \cdot \text{sign}(s) - \sigma s \right] \\
 &= \hat{u}_{eq} + u_r
 \end{aligned} \quad (8-6)$$

式中,

$$\begin{aligned}\hat{u}_{eq} &= \frac{1}{\hat{g}(x)} \left[-\hat{f}(x) + D^{n\alpha} y_d - \sum_{i=1}^{n-1} c_i D^{i\alpha} \tilde{x} \right] \\ u_r &= \frac{1}{\hat{g}(x)} \left[-k(x) \cdot \text{sign}(s) - \sigma s \right] \\ k(x) &= \beta(F(x) + \eta) + \beta(\beta - 1) |\hat{u}_{eq}| \end{aligned}$$

式中, η 为正常数。

下面的定理保证了分数阶系统 (8-1) 的稳定性。

定理 8.1 分数阶单输入单输出系统 (8-1) 满足假设条件 1, 2, 3 时, 上述设计的控制律 (8-6) 使得跟踪误差趋于零。

证明: 设计 Lyapunov 函数

$$V(t) = [s(t)]^2$$

求 $V(t)$ 关于时间的 q 阶导数, 得

$$\begin{aligned}D^\alpha V &= s \cdot D^\alpha s + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+q)}{\Gamma(1+j)\Gamma(1-j+q)} s^{(j)} D^{q-j} s \\ &= s \cdot D^\alpha s + \rho \end{aligned} \quad (8-7)$$

式中, ρ 为式 (8-7) 中级数项的上界, 为足够大的正常数。

将式 (8-5) 代入式 (8-7), 得

$$D^\alpha V = s \left[f(x) + g(x)u - D^{n\alpha} y_d + \sum_{i=1}^{n-1} c_i D^{i\alpha} \tilde{x} \right] + \rho \quad (8-8)$$

将控制律 (8-6) 代入式 (8-8), 得

$$\begin{aligned}D^\alpha V &= s \left[F(x) + \beta(\beta - 1) |\hat{u}_{eq}| - \beta^{-1} k(x) \cdot \text{sign}(s) - \sigma s \right] + \rho \\ &= -\eta |s| - \sigma s^2 + \rho \\ &= -\sigma V + \rho \end{aligned} \quad (8-9)$$

根据文献[94]中的定理 2, 式 (8-9) 说明了分数阶滑模面 (8-4) 的动力学行为是全局稳定的, 从而跟踪误差 (8-2) 趋于零。

8.3 分数阶 G-T 系统与 Arneodo 系统的同步设计

上文提出的分数阶伴随型系统的滑模控制设计技术, 可以应用于分数阶 Genesio-Tesi 混沌系统与分数阶 Arneodo 混沌系统的同步问题。

将分数阶 Genesio-Tesi 系统作为响应系统, 数学模型为

$$\begin{cases} D^\alpha x_1 = x_2 \\ D^\alpha x_2 = x_3 \\ D^\alpha x_3 = a(t)x_1 + b(t)x_2 + c(t)x_3 + d(t)x_1^2 + u(t) \end{cases} \quad (8-10)$$

输出为 $y = x_1$ 。

假设分数阶 Genesio-Tesi 系统中的参数 $a(t), b(t), c(t), d(t)$ 是未知的, 且满足如下条件:

$$|a(t)+6| \leq 0.1, |b(t)+2.92| \leq 0.1, |c(t)+1.2| \leq 0.1, |d(t)-1| \leq 0.1$$

因此,

$$\begin{aligned} f(x) &= a(t)x_1 + b(t)x_2 + c(t)x_3 + d(t)x_1^2 \\ \hat{f}(x) &= -6x_1 - 2.92x_2 - 1.2x_3 + x_1^2 \\ F(x) &= 0.1(|x_1| + |x_2| + |x_3| + x_1^2) \end{aligned}$$

将分数阶 Arneodo 混沌系统作为驱动系统, 数学模型为

$$\begin{cases} D^\alpha y_1 = y_2 \\ D^\alpha y_2 = y_3 \\ D^\alpha y_3 = 5.5y_1 - 3.5y_2 - y_3 - y_1^3 \end{cases} \quad (8-11)$$

期望跟踪信号为 $y_d = y_1$ 。

本小节的目标是实现分数阶 Genesio-Tesi 混沌系统 (8-10) 与分数阶 Arneodo

混沌系统(8-11)的同步,即设计滑模控制律使得分数阶 Genesio-Tesi 系统(8-10)输出信号 $y = x_1$ 跟踪分数阶 Arneodo 混沌系统(8-11)的输出信号 $y_d = y_1$ 。

根据 8.4 节设计的分数阶滑模面(8-2),该同步问题的滑模面设计为

$$s = c_1(x_1 - y_1) + c_2(x_2 - y_2) + (x_3 - y_3) \quad (8-12)$$

式中, $c_1 = 25$, $c_2 = 10$ 。

控制律设计为

$$\begin{aligned} u = & 6x_1 + 2.92x_2 + 1.2x_3 - x_1^2 + 5.5y_1 - 3.5y_2 - y_3 - y_1^3 - \\ & c_1(x_2 - y_2) - c_2(x_3 - y_3) - \sigma s - k \cdot \text{sign}(s) \end{aligned} \quad (8-13)$$

8.4 数值模拟

数值仿真中,分数阶 Genesio-Tesi 系统的初值 $x_0 = (-0.1, 0.5, 0.2)$, 分数阶 Arneodo 混沌系统的初值 $y_0 = (-0.2, 0.5, 0.2)$, 控制律中的参数 $\eta = 0.1$, $\sigma = 0.5$ 。同步效果如图 8-1~图 8-4 所示。

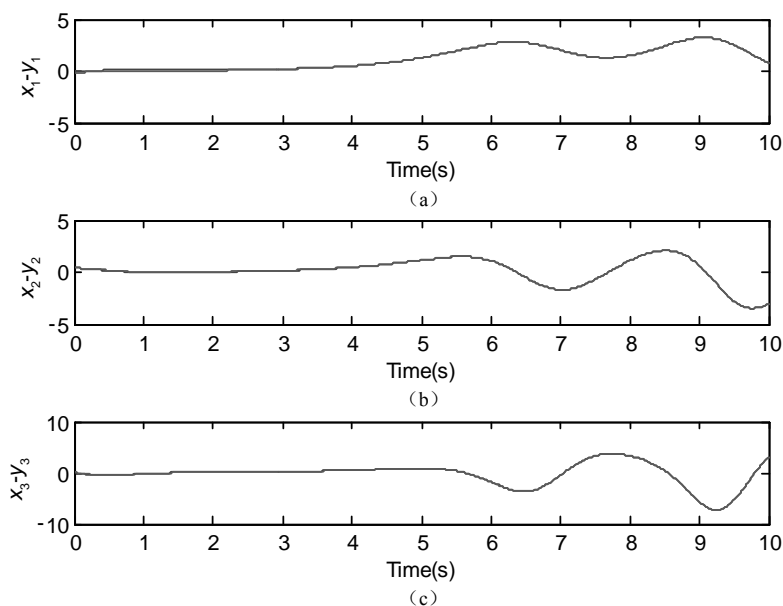


图 8-1 分数阶 Genesio-Tesi 系统与 Arneodo 系统的同步效果

其中, 实线表示驱动系统 (8-11) 状态变量 $x_i(t)$ 的变化曲线, 虚线表示响应系统 (8-10) 状态变量 $y_i(t)$ 的变化曲线。

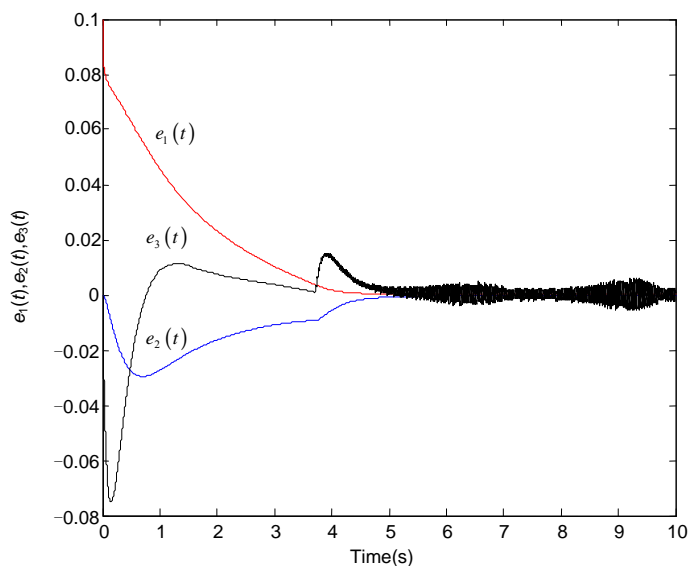


图 8-2 分数阶 Genesio-Tesi 系统与 Arneodo 系统的同步误差变化曲线

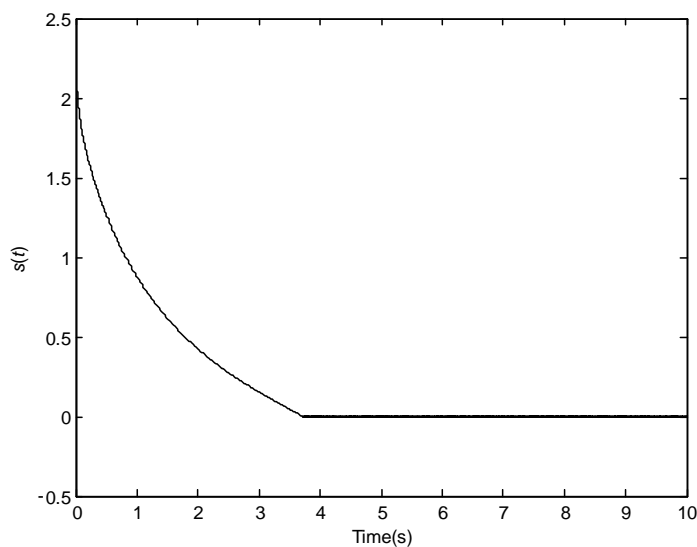


图 8-3 分数阶滑模面 (8-12) 的状态轨线

以上仿真结果显示, 在分数阶滑模控制律 (8-13) 的作用下, 分数阶 Genesio-Tesi 混沌系统与分数阶 Arneodo 混沌系统实现了完全同步, 但却带来了严重的控制颤振。为了消除颤振效应, 将 $\tanh(\cdot)$ 代替控制律 (8-13) 中的不连续项, 得到如下拟滑模控制律:

$$u = 6x_1 + 2.92x_2 + 1.2x_3 - x_1^2 + 5.5y_1 - 3.5y_2 - y_3 - y_1^3 - c_1(x_2 - y_2) - c_2(x_3 - y_3) - \sigma s - k \cdot \tanh(s) \quad (8-14)$$

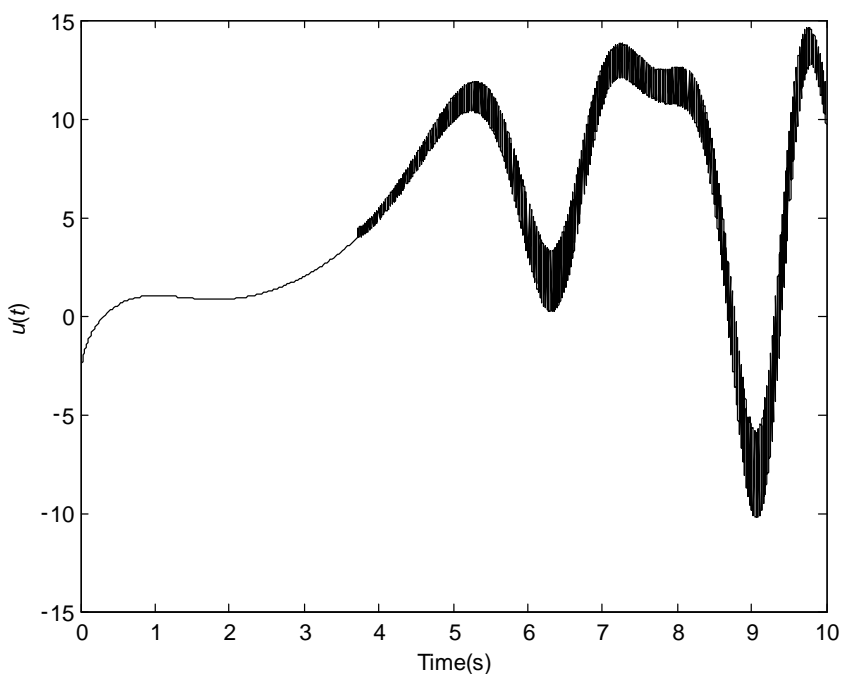


图 8-4 控制输入 (8-13) 的变化曲线

在拟滑模控制律 (8-14) 的作用下, 同步效果如图 8-5~图 8-8 所示。

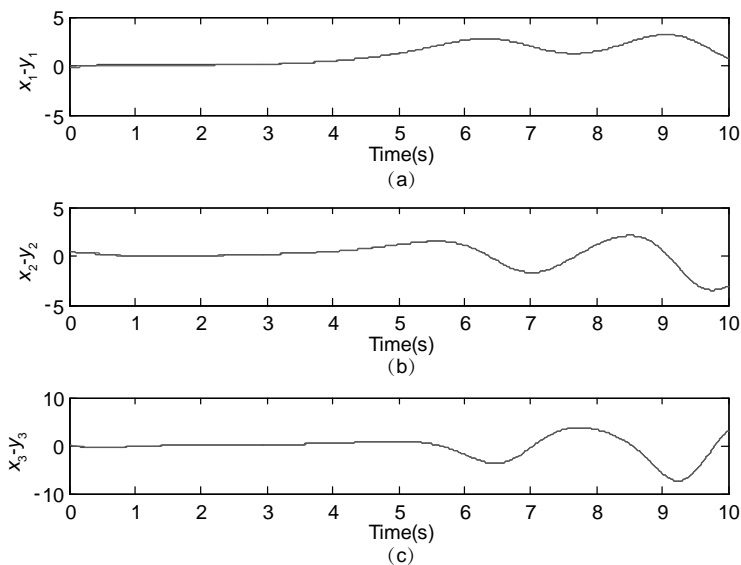


图 8-5 分数阶 Genesio-Tesi 系统与 Arneodo 系统的同步效果

其中，实线表示驱动系统 (8-11) 状态变量 $x_i(t)$ 的变化曲线，虚线表示响应系统 (8-10) 状态变量 $y_i(t)$ 的变化曲线。

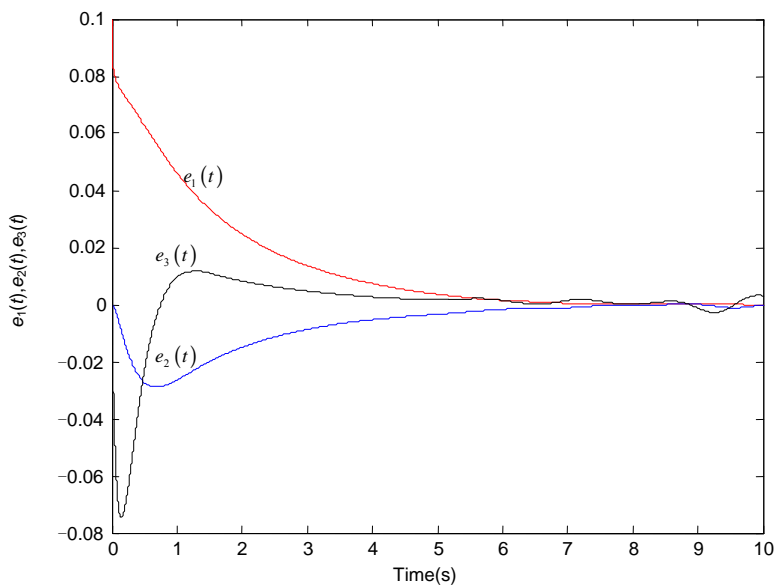


图 8-6 分数阶 Genesio-Tesi 系统与 Arneodo 系统的同步误差变化曲线

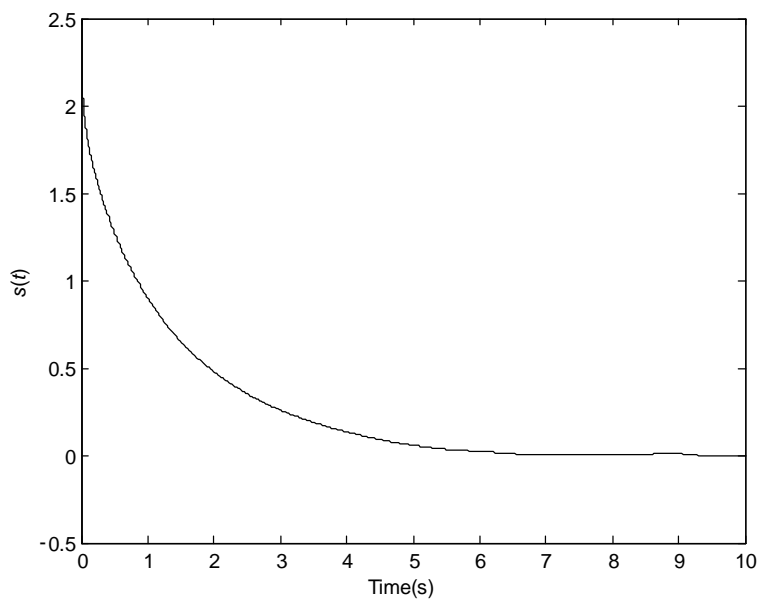


图 8-7 分数阶滑模面 (8-12) 的状态轨线

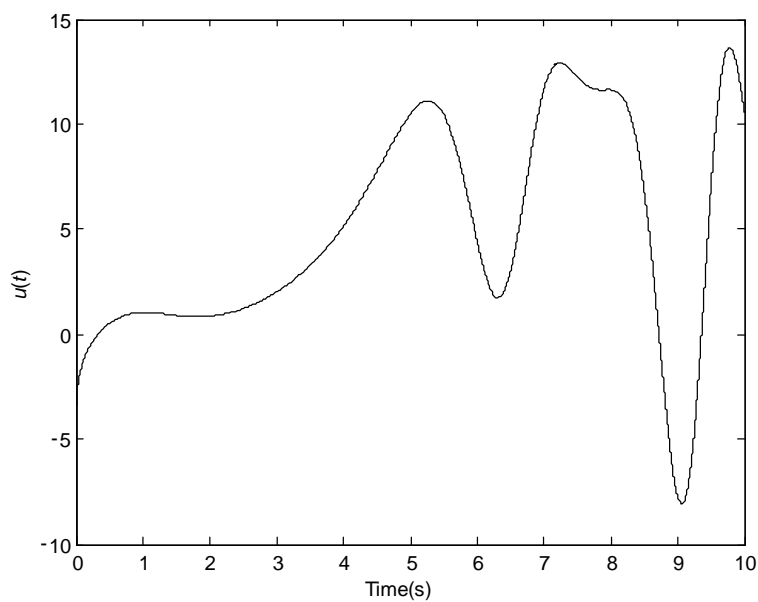


图 8-8 控制输入 (8-14) 的变化曲线

8.5 本章小结

本章针对分数阶伴随型系统的控制与同步问题,开展了分数阶滑模控制理论与方法的研究。首先给出分数阶单输入单输出非线性系统的数学模型,设计了一般形式的分数阶滑模面,基于 Mittag-Leffler 稳定性定理,证明滑模面的动力学稳定性,基于 Lyapunov 稳定性理论设计滑模控制律,最后通过数值仿真验证所设计控制律的有效性。

为了便于读者进一步深入研读本专著相关内容,这里提供作者团队发表的相关论文出处,详见文献[111]—[122]。



参考文献



- [1] MONJE C N A. Fractional-order systems and controls: fundamentals and applications [M]. Springer, 2010.
- [2] KILBAS A A, SRIVASTAVA H M, TRUJILLO J J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations [J].
- [3] DIETHELM K. The analysis of fractional differential equations: an application-oriented exposition using differential operators of Caputo type [M]. Springer Verlag, 2010.
- [4] PODLUBNY I. Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications [M]. Academic press, 1999.
- [5] MATHIEU MOZE J S, AND ALAIN OUSTALOU. LMI Characterization of Fractional Systems Stability [J]. Advances in Fractional Calculus: Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering, 2007, 419–434.
- [6] BALACHANDRAN K, PARK J, TRUJILLO J. Controllability of nonlinear fractional dynamical systems [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2012, 75 (4): 1919-1926.
- [7] WESTERLUND S. Capacitor Theory [J]. IEEE Transactions on Dielectrics and

- Electrical Insulation, 1994, 1
- [8] 程序. 超级电容器分数阶建模及其控制方法研究[D]. 北京: 华北电力大学, 2014.
- [9] PETRA I. Fractional-Order Nonlinear Systems [M]. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.
- [10] 邓立为, 宋申民. 基于分数阶滑模的挠性航天器姿态鲁棒跟踪控制 [J]. 航空学报, 2013, 34 (8): 1915-1923.
- [11] VALERIO D, DA COSTA J S. An introduction to fractional control [M]. Institution of Engineering & Technology (IET), 2012.
- [12] LUO Y, CHEN Y. Fractional Order Motion Controls [M]. Wiley. com, 2012.
- [13] LURIE B J. Three-parameter tunable tilt-integral-derivative (TID) controller [M]. Google Patents. 1994.
- [14] OUSTALOUP A, MOREAU X, NOUILLANT M. The CRONE suspension [J]. Control Engineering Practice, 1996, 4 (8): 1101-1108.
- [15] OUSTALOUP A. Diversity and non-integer differentiation for system dynamics [M]. John Wiley & Sons, 2014.
- [16] PODLUBNY I. Fractional-order systems and $PI^{\lambda}D^{\mu}$ -controllers [J]. Automatic Control, IEEE Transactions on, 1999, 44 (1): 208-214.
- [17] RAYNAUD H F Z A. State-space representation for fractional order controllers[J]. Automatica, 2000, 36(7): 1017-1021.
- [18] CHEN D X A Y. A Comparative Introduction of Four Fractional Order Controllers [J]. Proceedings of the 4th World Congress on Intelligent Control and Automation June 10-14, 2002, Shanghai, PRChina, 2002, 3228-3235.
- [19] 王春阳, 李明秋, 姜淑华, 等. 分数阶控制系统设计[M]. 北京: 国防工业出版社, 2014.

- [20] YIN C, ZHONG S-M, CHEN W-F. Design of sliding mode controller for a class of fractional-order chaotic systems [J]. J Sci Commun, 2012, 17 (1): 356-366.
- [21] BANDYOPADHYAY B, KAMAL S. Stabilization and Control of Fractional Order Systems: A Sliding Mode Approach [M]. Springer, 2015.
- [22] AGHABABA M P. Robust stabilization and synchronization of a class of fractional-order chaotic systems via a novel fractional sliding mode controller [J]. J Sci Commun, 2012, 17 (6): 2670-2681.
- [23] VINAGRE B, PETR Š I, PODLUBNY I, et al. Using fractional order adjustment rules and fractional order reference models in model-reference adaptive control [J]. Nonlinear Dynam, 29 (1-4): 269-279.
- [24] LADACI S, CHAREF A. On Fractional Adaptive Control [J]. Nonlinear Dynam, 2006, 43 (4): 365-378.
- [25] ODIBAT Z M. Adaptive feedback control and synchronization of non-identical chaotic fractional order systems [J]. Nonlinear Dynam, 2009, 60 (4): 479-487.
- [26] LI C, TONG Y. Adaptive control and synchronization of a fractional-order chaotic system [J]. Pramana, 2013, 80 (4): 583-592.
- [27] CHEN L, WEI S, CHAI Y, et al. Adaptive Projective Synchronization between Two Different Fractional-Order Chaotic Systems with Fully Unknown Parameters [J]. Mathematical Problems in Engineering, 2012: 1-16.
- [28] A general formulation and solution for fractional optimal control [J].
- [29] JELICIC Z D, PETROVACKI N. Optimality conditions and a solution scheme for fractional optimal control problems [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2008, 38 (6): 571-581.
- [30] DJENNOUNE S, BETTAYEB M. Optimal synergetic control for fractional-order systems [J]. Automatica, 2013, 49 (7): 2243-2249.
- [31] ZHI L, ZHANG Y, CHEN L, et al. Fractional $PI\lambda D\mu$ control and optimisation for

- vehicle active suspension [J]. International Journal of Vehicle Autonomous Systems, 2008, 6 (3): 276-287.
- [32] ALDAIR A A, WANG W J. Design of fractional order controller based on evolutionary algorithm for a full vehicle nonlinear active suspension systems [J]. International journal of Control and Automation (IJCA), 2010, 3 (4): 33-46.
- [33] CHEN N, CHEN N, CHEN Y. On Fractional Control Strategy for Four-Wheel-Steering Vehicle [M]. New Trends in Nanotechnology and Fractional Calculus Applications. Springer. 2010: 453-462.
- [34] SUAREZ J I, VINAGRE B M, YANGQUAN C. A Fractional Adaptation Scheme for Lateral Control of an AGV [J]. J Vib Control, 2008, 14 (9-10): 1499-1511.
- [35] LI C P, ZHANG F R. A survey on the stability of fractional differential equations [J]. The European Physical Journal Special Topics, 2011, 193 (1): 27-47.
- [36] BUTKOVSKII A G, POSTNOV S S, POSTNOVA E A. Fractional integro-differential calculus and its control-theoretical applications. II. Fractional dynamic systems: Modeling and hardware implementation [J]. Automation and Remote Control, 2013, 74 (5): 725-749.
- [37] RIVERO M, ROGOSIN S V, TENREIRO MACHADO J A, et al. Stability of Fractional Order Systems [J]. Mathematical Problems in Engineering, 2013: 1-14.
- [38] PETRSA I. Stability of Fractional-order systems with Rational Orders: A Survey [J]. Fractional Calculus and Applied Analysis, 2009, 12(3):
- [39] MATIGNON D. Stability results for fractional differential equations with applications to control processing; proceedings of the Computational engineering in systems applications, F, 1996 [C]. Citeseer.
- [40] MATIGNON D. Stability properties for generalized fractional differential systems [J]. ESAIM: Proceedings, 1998(5): 145-158.

- [41] DENG W, LI C, L J. Stability analysis of linear fractional differential system with multiple time delays [J]. *Nonlinear Dynam*, 2007, 48 (4): 409-416.
- [42] CHEN J-G L A Y-Q. Robust Stability and Stabilization of Fractional-Order Interval Systems with the Fractional Order [J]. *IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL*, 2010, 55 (1).
- [43] LI Y, CHEN Y, PODLUBNY I. Mittag-Leffler stability of fractional order nonlinear dynamic systems [J]. *Automatica*, 2009, 45 (8): 1965-1969.
- [44] LI Y, CHEN Y, PODLUBNY I. Stability of fractional-order nonlinear dynamic systems: Lyapunov direct method and generalized Mittag-Leffler stability [J]. *Comput Math Appl*, 2010, 59 (5): 1810-1821.
- [45] TRIGEASSOU J C, MAAMRI N, SABATIER J, et al. A Lyapunov approach to the stability of fractional differential equations [J]. *Signal Processing*, 2011, 91 (3): 437-445.
- [46] TRIGEASSOU J-C, MAAMRI N, OUSTALOUP A. Lyapunov Stability of Linear Fractional Systems: Part 1—Definition of Fractional Energy; proceedings of the ASME 2013 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, F, 2013 [C]. American Society of Mechanical Engineers.
- [47] TRIGEASSOU J-C, MAAMRI N, OUSTALOUP A. Lyapunov Stability of Linear Fractional Systems: Part 2—Derivation of A Stability Condition; proceedings of the Trigeassou, Jean-ClaudeMaamri, NezhaOustaloup, AlainF, 2013 [C]. American Society of Mechanical Engineers.
- [48] TRIGEASSOU J-C, MAAMRI N, OUSTALOUP A. Lyapunov Stability of Noncommensurate Fractional Order Systems: An Energy Balance Approach [J]. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2016, 11 (4): 041007.
- [49] TRIGEASSOU J-C, MAAMRI N. Lyapunov stability of commensurate fractional order systems: a physical interpretation [J]. *Journal of Computational*

- and Nonlinear Dynamics, 2015.
- [50] HARTLEY T T, VEILLETTE R J, LORENZO C F, et al. On the energy stored in fractional-order electrical elements; proceedings of the ASME 2013 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, F, 2013 [C]. American Society of Mechanical Engineers.
- [51] HARTLEY T T, TRIGEASSOU J-C, LORENZO C F, et al. Energy Storage and Loss in Fractional-Order Systems [J]. Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, 2015, 10 (6): 061006.
- [52] HARTLEY T T, VEILLETTE R J, ADAMS J L, et al. Energy storage and loss in fractional-order circuit elements [J]. IET Circuits, Devices & Systems, 2015, 9 (3): 227-235.
- [53] PETR Š I. A note on the fractional-order Chua's system [J]. Chaos Soliton Fract, 2008, 38 (1): 140-147.
- [54] CHEN J-H, CHEN W-C. Chaotic dynamics of the fractionally damped van der Pol equation [J]. Chaos Soliton Fract, 2008, 35 (1): 188-198.
- [55] BARBOSA R S, MACHADO J T, VINAGRE B, et al. Analysis of the Van der Pol oscillator containing derivatives of fractional order [J]. J Vib Control, 2007, 13 (9-10): 1291-1301.
- [56] TAVAZOEI M S, HAERI M, ATTARI M, et al. More details on analysis of fractional-order van der Pol oscillator [J]. J Vib Control, 2009, 15 (6): 803-819.
- [57] GRIGORENKO I, GRIGORENKO E. Chaotic dynamics of the fractional Lorenz system [J]. Phys Rev Lett, 2003, 91 (3): 034101.
- [58] YU Y, LI H-X, WANG S, et al. Dynamic analysis of a fractional-order Lorenz chaotic system [J]. Chaos Soliton Fract, 2009, 42 (2): 1181-1189.
- [59] LI C, CHEN G. Chaos in the fractional order Chen system and its control [J].

- Chaos Soliton Fract, 2004, 22 (3): 549-554.
- [60] LU J G, CHEN G. A note on the fractional-order Chen system [J]. Chaos Soliton Fract, 2006, 27 (3): 685-688.
- [61] UETA T, CHEN G. Bifurcation analysis of Chen's equation [J]. Int J Bifurcat Chaos, 2000, 10 (8): 1917-1931.
- [62] LU J G. Chaotic dynamics of the fractional-order Lü system and its synchronization [J]. Phys Lett A, 2006, 354 (4): 305-311.
- [63] WANG X-Y, WANG M-J. Dynamic analysis of the fractional-order Liu system and its synchronization [J]. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 2007, 17 (3): 033106-033106-033106.
- [64] LI C, CHEN G. Chaos and hyperchaos in the fractional-order Rössler equations [J]. Physica A, 2004, 55-61.
- [65] ZHANG W, ZHOU S, LI H, et al. Chaos in a fractional-order Rössler system [J]. Chaos Soliton Fract, 2009, 42 (3): 1684-1691.
- [66] LU J G. Chaotic dynamics and synchronization of fractional-order Arneodo's systems [J]. Chaos Soliton Fract, 2005, 26 (4): 1125-1133.
- [67] KANG Y, LIN K T, CHEN J H, et al. Parametric analysis of a fractional-order Newton-Leipnik system [J]. Journal of Physics: Conference Series, 2008.
- [68] SHEU L-J, CHEN H-K, CHEN J-H, et al. Chaos in the Newton–Leipnik system with fractional order [J]. Chaos Soliton Fract, 2008, 36 (1): 98-103.
- [69] TAVAZOEI M S, HAERI M. Chaotic attractors in incommensurate fractional order systems [J]. Physica D, 2008, 237 (20): 2628-2637.
- [70] AHMED E, EL-SAYED A, EL-SAKA H A. Equilibrium points, stability and numerical solutions of fractional-order predator–prey and rabies models [J]. J Math Anal Appl, 2007, 325 (1): 542-553.
- [71] CHEN W-C. Nonlinear dynamics and chaos in a fractional-order financial

- system [J]. *Chaos Soliton Fract*, 2008, 36 (5): 1305-1314.
- [72] ZHANG Y, ZHOU T. Three Schemes to Synchronize Chaotic Fractional-Order Rucklidge Systems [J]. *Int J Mod Phys B*, 2007, 21 (12): 2033-2044.
- [73] LI C P, DENG W H, XU D. Chaos synchronization of the Chua system with a fractional order [J]. *Physica A*, 2006, 360 (2): 171-185.
- [74] LI C, YAN J. The synchronization of three fractional differential systems [J]. *Chaos Soliton Fract*, 2007, 32 (2): 751-757.
- [75] ODIBAT Z M, CORSON N, AZIZ-ALAOUI M A, et al. Synchronization of Chaotic Fractional-Order Systems Via Linear Control [J]. *Int J Bifurcat Chaos*, 2010, 20 (1): 81-97.
- [76] KUNTANAPREEDA S. Robust synchronization of fractional-order unified chaotic systems via linear control [J]. *Comput Math Appl*, 2012, 63 (1): 183-190.
- [77] PENG G. Synchronization of fractional order chaotic systems [J]. *Phys Lett A*, 2007, 363 (5-6): 426-432.
- [78] YUAN L-G, YANG Q-G. Parameter identification and synchronization of fractional-order chaotic systems [J]. *J Sci Commun*, 2012, 17 (1): 305-316.
- [79] HEGAZI A S, AHMED E, MATOUK A E. On chaos control and synchronization of the commensurate fractional order Liu system [J]. *J Sci Commun*, 2013, 18 (5): 1193-1202.
- [80] ZHU H, ZHOU S, HE Z. Chaos synchronization of the fractional-order Chen's system [J]. *Chaos Soliton Fract*, 2009, 41 (5): 2733-2740.
- [81] MATOUK A E. Chaos, feedback control and synchronization of a fractional-order modified Autonomous Van der Pol-Duffing circuit [J]. *J Sci Commun*, 2011, 16 (2): 975-986.
- [82] YAN J, LI C. On chaos synchronization of fractional differential equations [J]. *Chaos Soliton Fract*, 2007, 32 (2): 725-735.

- [83] BHALEKAR S, DAFTARDAR-GEJJI V. Synchronization of different fractional order chaotic systems using active control [J]. J Sci Commun, 2010, 15 (11): 3536-3546.
- [84] ASHEGHAN M M, HAMIDI BEHESHTI M T, TAVAZOEI M S. Robust synchronization of perturbed Chen's fractional-order chaotic systems [J]. J Sci Commun, 2011, 16 (2): 1044-1051.
- [85] PAN L, ZHOU W, ZHOU L, et al. Chaos synchronization between two different fractional-order hyperchaotic systems [J]. J Sci Commun, 2011, 16 (6): 2628-2640.
- [86] ODIBAT Z. A note on phase synchronization in coupled chaotic fractional order systems [J]. Nonlinear Anal Real, 2012, 13 (2): 779-789.
- [87] MAHMOUDIAN M, GHADERI R, RANJBAR A, et al. Synchronization of Fractional-Order Chaotic System via Adaptive PID Controller [M]. New Trends in Nanotechnology and Fractional Calculus Applications. Springer. 2010: 445-452.
- [88] LIU JIE L X, ZHAO JUNCHAN. Prediction-control based feedback control of a fractional order unified chaotic system [J]. 2011 Chinese Control and Decision Conference (CCDC), 2011, 2093-2097.
- [89] RADWAN A G, MOADDY K, SALAMA K N, et al. Control and switching synchronization of fractional order chaotic systems using active control technique [J]. J Adv Res, 2013.
- [90] SLOTINE J-J E, LI W. Applied nonlinear control [M]. Prentice hall New Jersey, 1991.
- [91] DADRAS S, MOMENI H R. Control of a fractional-order economical system via sliding mode [J]. Physica A, 2010, 389 (12): 2434-2442.
- [92] CHEN D-Y, LIU Y-X, MA X-Y, et al. Control of a class of fractional-order chaotic systems via sliding mode [J]. Nonlinear Dynam, 2012, 67 (1): 893-901.

- [93] FAIEGHI M R, DELAVARI H, BALEANU D. Control of an uncertain fractional-order Liu system via fuzzy fractional-order sliding mode control [J]. *J Vib Control*, 2012, 18 (9): 1366-1374.
- [94] FAIEGHI M R, DELAVARI H, BALEANU D. A note on stability of sliding mode dynamics in suppression of fractional-order chaotic systems [J]. *Comput Math Appl*, 2012.
- [95] YIN C, DADRAS S, ZHONG S-M. Design an adaptive sliding mode controller for drive-response synchronization of two different uncertain fractional-order chaotic systems with fully unknown parameters [J]. *J Franklin I*, 2012, 349 (10): 3078-3101.
- [96] YIN C, DADRAS S, ZHONG S-M, et al. Control of a novel class of fractional-order chaotic systems via adaptive sliding mode control approach [J]. *Appl Math Model*, 2013, 37 (4): 2469-2483.
- [97] FRIDMAN L, MORENO J, IRIARTE R. Sliding Modes After the First Decade of the 21st Century: State of the Art [M]. Springer, 2011.
- [98] FAIEGHI M R, DELAVARI H, BALEANU D. A note on stability of sliding mode dynamics in suppression of fractional-order chaotic systems [J]. *Comput Math Appl*, 2013, 66 (5): 832-837.
- [99] SABATIER J, AGRAWAL O P, MACHADO J. Advances in fractional calculus: Theoretical developments and applications in physics and engineering [M]. Springer Publishing Company, Incorporated, 2007.
- [100] L J, CHEN G, CHENG D, et al. Bridge the gap between the Lorenz system and the Chen system [J]. *Int J Bifurcat Chaos*, 2002, 12 (12): 2917-2926.
- [101] FUKUNAGA M. On initial value problems of fractional differential equations [J]. *International Journal of Applied Mathematics*, 2002, 9 (2): 219-236.
- [102] WU X, LI J, CHEN G. Chaos in the fractional order unified system and its synchronization [J]. *J Franklin I*, 2008, 345 (4): 392-401.

- [103] ZRIBI M, SMAOUI N, SALIM H. Synchronization of the unified chaotic systems using a sliding mode controller [J]. *Chaos Soliton Fract*, 2009, 42 (5): 3197-3209.
- [104] TAN X, ZHANG J, YANG Y. Synchronizing chaotic systems using backstepping design [J]. *Chaos Soliton Fract*, 2003, 16 (1): 37-45.
- [105] YU Y, ZHANG S. Adaptive backstepping synchronization of uncertain chaotic system [J]. *Chaos Soliton Fract*, 2004, 21 (3): 643-649.
- [106] PETRAŠ I. Fractional-order nonlinear systems: modeling, analysis and simulation [M]. Springer, 2011.
- [107] ZHAO L D, HU J B. Synchronizing Fractional Chaotic Genesio-Tesi System via Backstepping Approach [J]. *Applied Mechanics and Materials*, 2012, 220-223 1244-1248.
- [108] HARB A M, HARB B A. Chaos control of third-order phase-locked loops using backstepping nonlinear controller [J]. *Chaos Soliton Fract*, 2004, 20 (4): 719-723.
- [109] JUN-GUO L. Chaotic dynamics and synchronization of fractional-order Genesio-Tesi systems [J]. *Chinese Physics*, 2005, 14 (8): 1517.
- [110] AHMED E, EL-SAYED A M A, EL-SAKA H A A. On some Routh-Hurwitz conditions for fractional order differential equations and their applications in Lorenz, Rössler, Chua and Chen systems [J]. *Phys Lett A*, 2006, 358 (1): 1-4.
- [111] Yuan J, Shi B, Ji W Q. Adaptive sliding mode control of a novel class of fractional chaotic systems[J]. *Advances in Mathematical Physics*, 2013, 2013 (4): 594-603.
- [112] Yuan J, Shi B. Sliding mode control of fractional lorenz-stenflo hyperchaotic system[J]. *Journal of Discontinuity, Nonlinearity and Complexity*, 2015, 4 (4): 445-455.
- [113] Yuan J, Shi B, Yu Z T. Adaptive sliding control for a class of fractional commensurate

- order chaotic systems[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2015, 2015 (1): 1-10.
- [114] Yuan J, Shi B, Zeng X Y, et al. Sliding mode control of the fractional order unified chaotic system[J]. Abstract and Applied Analysis, 2013, 2013 (108): 219-228.
- [115] Yuan J, Shi B, Wang Y. Control and synchronization of fractional unified chaotic systems with a single sliding mode controller[C]. 2014 33th Chinese Control Conference (CCC). IEEE, 2014:1800-1805.
- [116] Yuan J, Shi B. Control and synchronization of fractional unified chaotic systems via active control technique[C]. 2014 33th Chinese Control Conference (CCC). IEEE, 2014: 1977-1982.
- [117] Yuan J, Shi B, Chao D. Pseudo-state sliding mode control of fractional siso nonlinear systems[J]. Advances in Mathematical Physics, 2013 (2013): 757-786.
- [118] Zhang Y A, Yuan J, Liu J M, Shi B. Lyapunov functions and sliding mode control for two degrees-of-freedom and multidegrees-of-freedom fractional oscillators[J]. Journal of Vibration and Acoustics, February 2017, Vol. 139 / 011014-1.
- [119] Yuan J, Zhang Y A, Liu J M, Shi B. Sliding mode control of vibration in single-degree-of-freedom fractional oscillators[J]. Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control. 2017, 139 (11): 114503-1-114503-6.
- [120]. Yuan J, Zhang Y A, Liu J M, Shi B, et al. Mechanical energy and equivalent differential equations of motion for single-degree-of-freedom fractional oscillators[J]. Journal of Sound and Vibration, 2017, 397: 192-203.
- [121] Yuan J, Zhang Y A, Liu J M, Shi B. Equivalence of Initialized Fractional Integrals and the Diffusive Model[J]. Journal of computational and nonlinear dynamics. (To appear)